2 MOVIMIENTO EN LÍNEA RECTA

Toda misión lograda del transbordador espacial termina con un breve periodo de movimiento rectilíneo para detenerse en la pista. Esta nave, no más grande que un *jet* comercial ordinario, toca tierra a más de 350 km/h. Incluso con un paracaídas de arrastre que le ayuda a frenar, la veloz nave necesita hasta 3 km para detenerse.

¿Es correcto decir que el transbordador espacial está *acelerando* cuando frena hasta detenerse?

¿Cómo describimos el movimiento de un *jet* de combate lanzado desde la cubierta de un portaaviones? Cuando lanzamos una pelota verticalmente, ¿qué tanto sube? Cuando se nos resbala un vaso de la mano, ¿cuánto tiempo tenemos para atraparlo antes de que choque con el piso? Éste es el tipo de preguntas que aprenderá a contestar en este capítulo. Iniciamos nuestro estudio de la física con la *mecánica*, el estudio de las relaciones entre: fuerza, materia y movimiento. El objetivo de este capítulo y el siguiente es desarrollar métodos generales para describir el movimiento. La parte de la mecánica que describe el movimiento es la *cinemática*. Después estudiaremos la *dinámica*, o sea la relación entre el movimiento y sus causas.

En este capítulo estudiaremos el movimiento más simple: una partícula que viaja en línea recta. A menudo usaremos una partícula para modelar un cuerpo en movimiento, si efectos tales como la rotación o el cambio de forma no son importantes. Para describir el movimiento de una partícula, introduciremos las cantidades físicas *velocidad* y *aceleración*, que en física tienen definiciones sencillas, aunque son más precisas y un poco distintas de las empleadas en el lenguaje cotidiano. Si se fija bien en las definiciones, trabajará mejor con éstas y otras cantidades físicas importantes.

Un aspecto importante de las definiciones de velocidad y aceleración en física es que son *vectores*. Como vimos en el capítulo 1, esto implica que tienen magnitud y dirección. Aquí nos interesa sólo el movimiento rectilíneo, por lo que no necesitaremos aún toda el álgebra vectorial, pero en el capítulo 3 incluiremos en nuestro estudio el movimiento en tres dimensiones, por ello será indispensable usar vectores.

Un caso especial importante del movimiento rectilíneo es cuando la aceleración es constante, situación que encontraremos con frecuencia al estudiar física. Un ejemplo es el movimiento de un cuerpo que cae libremente. Deduciremos ecuaciones sencillas para describir el movimiento con aceleración constante. También consideraremos situaciones en las que la aceleración varía durante el movimiento. En estos casos habrá que integrar para describir el movimiento. (Si no ha estudiado integración aún, esta sección es opcional.)

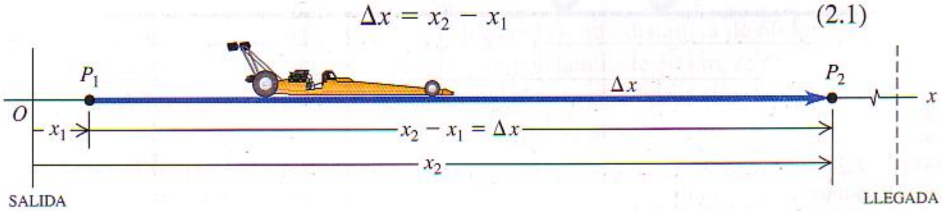
2.1 | Desplazamiento, tiempo y velocidad media

Suponga que una piloto de autos de arrancones conduce su auto por una pista recta. Para estudiar este movimiento, necesitamos un sistema de coordenadas para describir la posición del auto. Decidimos que el eje x yace a lo largo de la trayectoria recta del auto, con el origen O en la línea de salida (Fig. 2.1). Describiremos la posición del auto en términos de la de un punto representativo, digamos su extremo delantero. Así, representamos todo el auto con ese punto y lo tratamos como una **partícula**.

Una forma útil de describir el movimiento del frente del auto —es decir, el de la partícula— es en términos del cambio en la posición de la partícula (o sea, el cambio en su coordenada x) a lo largo de un intervalo de tiempo. Supongamos que 1.0 s después del arranque el frente del auto está en P_1, a 19 m del origen, y 4.0 s después del arranque está en P_2, a 277 m del origen. El *desplazamiento* de la partícula es un vector que apunta de P_1 a P_2 (véase la sección 1.7). La figura 2.1 muestra que este vector apunta a lo largo del eje x. La componente x del desplazamiento es simplemente el cambio en el valor de x (277 m − 19 m) = 258 m, que hubo en un lapso de (4.0 s − 1.0 s) = 3.0 s. Definimos la **velocidad media** del auto durante este tiempo como una cantidad *vectorial* cuya componente x es el cambio en x dividido entre el intervalo de tiempo: (258 m)/(3.0 s) = 86 m/s. En general, la velocidad media depende del intervalo de tiempo escogido. Durante un lapso de 3.0 s *antes* del arranque, la velocidad media fue cero, porque el auto estaba en reposo en la línea de salida y tuvo desplazamiento cero.

Generalicemos el concepto de velocidad media. En el tiempo t_1, el auto está en P_1, con coordenada x_1, y en t_2 está en P_2 con coordenada x_2. El desplazamiento en el intervalo de t_1 a t_2 es el vector de P_1 a P_2, con componente x $(x_2 - x_1)$ y componentes y y z iguales a cero. La componente x del desplazamiento del auto es el cambio en la coordenada x, que abreviamos así:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \tag{2.1}$$



2.1 Posiciones de un auto de arrancones en dos instantes durante su recorrido.

CUIDADO Δx no es el producto de Δ y x; es un solo símbolo que significa "el cambio en la cantidad x". Siempre usaremos la letra griega mayúscula Δ ("delta") para representar un *cambio* en una cantidad, calculada restando el valor *inicial* al *final*. Asimismo, el intervalo de t_1 a t_2 es Δt, el cambio en la cantidad t: $\Delta t = t_2 - t_1$ (tiempo final menos tiempo inicial).

Ahora podemos definir la componente x de la velocidad media con mayor precisión: es la componente x del desplazamiento, Δx, dividida entre el intervalo Δt en el que ocurre el desplazamiento. Representamos esta cantidad con el símbolo $v_{\text{med-}x}$, donde el subíndice "med" indica un valor medio y el subíndice x indica que se trata de la componente x:

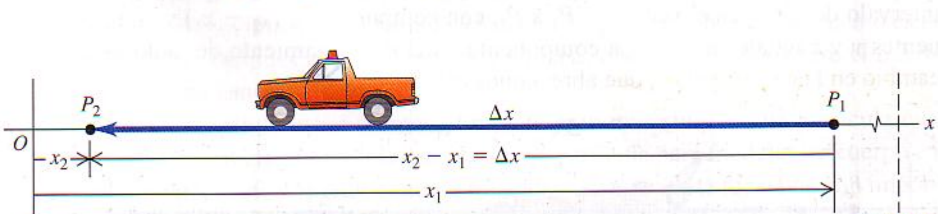
$$v_{\text{med-}x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{(velocidad media, movimiento rectilíneo)} \qquad (2.2)$$

En el ejemplo anterior teníamos $x_1 = 19$ m, $x_2 = 277$ m, $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 4.0$ s, así que la ecuación (2.2) da

$$v_{\text{med-}x} = \frac{277\text{ m} - 19\text{ m}}{4.0\text{ s} - 1.0\text{ s}} = \frac{258\text{ m}}{3.0\text{ s}} = 86\text{ m/s}$$

La velocidad media del auto es positiva. Esto significa que, durante el intervalo, la coordenada x aumentó y el auto se movió en la dirección $+x$ (a la derecha en la Fig. 2.1). Si una partícula se mueve en la dirección x *negativa* durante un intervalo de tiempo, su velocidad media en ese lapso es negativa. Por ejemplo, suponga que la camioneta de un juez se mueve hacia la izquierda junto a la pista (Fig. 2.2). La camioneta está en $x_1 = 277$ m en $t_1 = 16.0$ s, y en $x_2 = 19$ m en $t_2 = 25.0$ s. Entonces, $\Delta x = (19\text{ m} - 277\text{ m}) = -258$ m y $\Delta t = (25.0\text{ s} - 16.0\text{ s}) = 9.0$ s, y la componente x de la velocidad media es $v_{\text{med-}x} = \Delta x/\Delta t = (-258\text{ m})/(9.0\text{ s}) = -29$ m/s. Siempre que x es positiva y aumenta o es negativa y se hace menos negativa, la partícula se mueve en la dirección $+x$ y $v_{\text{med-}x}$ es positiva (Fig. 2.1). Siempre que x es positiva y disminuye, o es negativa y se hace más negativa, la partícula se mueve en la dirección $-x$ y $v_{\text{med-}x}$ es negativa (Fig. 2.2).

CUIDADO No sucumba a la tentación de pensar que una velocidad media positiva implica movimiento a la derecha, como en la figura 2.1, y una velocidad negativa implica movimiento a la izquierda, como en la figura 2.2. Tales conclusiones *sólo* son correctas si la dirección $+x$ es hacia la derecha, como escogimos en ambas figuras. Igualmente podríamos haber decidido que la dirección $+x$ es



2.2 Posiciones de la camioneta de un juez en dos instantes durante su movimiento. Los puntos P_1 y P_2 ahora se refieren al movimiento de la camioneta, por lo que son diferentes de los de la figura 2.1. La componente x del desplazamiento de la camioneta es negativa, así que $v_{\text{med-}x}$ es negativa.

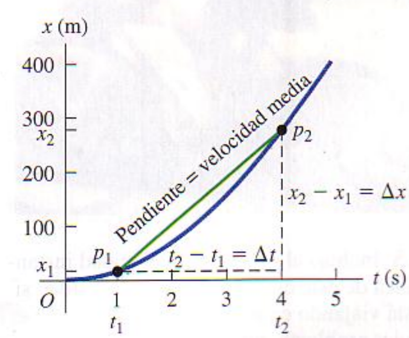
hacia la izquierda, con el origen en la llegada. Entonces, el auto habría tenido velocidad media negativa, y el vehículo, positiva. En casi todos los problemas, podremos escoger la dirección del eje de coordenadas. Una vez tomada la decisión, *deberá* tomarse en cuenta al interpretar los signos de $v_{\text{med-}x}$ y otras cantidades que describen el movimiento.

En el movimiento rectilíneo normalmente llamaremos a Δx el desplazamiento y a $v_{\text{med-}x}$ la velocidad media, pero no olvide que éstas son realmente las componentes x de cantidades vectoriales que, en este caso especial, *sólo* tienen componentes x. En el capítulo 3, los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración tendrán dos o tres componentes distintas de cero.

La figura 2.3 es una gráfica de la posición del auto de arrancones en función del tiempo, es decir, una **gráfica *x-t***. La curva de la figura *no* representa la trayectoria del auto; ésta es una línea recta, como se ve en la figura 2.1. Más bien, la gráfica es una forma de representar cómo cambia la posición del auto con el tiempo. Los puntos rotulados p_1 y p_2 corresponden a los puntos P_1 y P_2 de la trayectoria del auto. La línea p_1p_2 es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con cateto vertical $\Delta x = x_2 - x_1$ y cateto horizontal $\Delta t = t_2 - t_1$. Así, la velocidad media del auto $v_{\text{med-}x} = \Delta x/\Delta t$ es igual a la *pendiente* de la línea p_1p_2, es decir, el cociente del cateto vertical Δx y el cateto horizontal Δt.

La velocidad media depende sólo del desplazamiento total $\Delta x = x_2 - x_1$ que se da durante el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$, no en los pormenores de lo que sucede dentro de ese intervalo. Un segundo auto podría haber pasado por el punto P_1 de la figura 2.1 en el mismo instante t_1 que el primero, rebasando a éste, para después reventar el motor y bajar la velocidad, pasando por P_2 en el mismo instante t_2 que el primer auto. Ambos autos tienen el mismo desplazamiento en el mismo lapso, así que tienen la misma velocidad media.

Si expresamos la distancia en metros y el tiempo en segundos, la velocidad media se mide en metros por segundo (m/s). Otras unidades de velocidad comunes son kilómetros por hora (km/h), pies por segundo* (ft/s), millas por hora (mi/h) y nudos (1 nudo = 1 milla náutica/h = 6080 ft/h). La tabla 2.1 muestra algunas magnitudes típicas de velocidad.



2.3 La posición de un auto de arrancones en función del tiempo. La velocidad media $v_{\text{med-}x}$ entre los puntos P_1 y P_2 de la figura 2.1 es la pendiente de la línea p_1p_2. Esta línea sube hacia la derecha, por lo que la pendiente es positiva y $v_{\text{med-}x}$ es positiva.

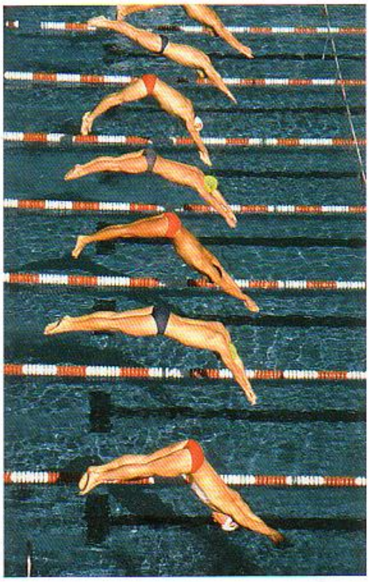
Tabla 2.1 Magnitudes típicas de velocidad

Reptar de caracol	10^{-3} m/s	Movimiento aleatorio de moléculas de aire	500 m/s
Paseo vigoroso	2 m/s	Avión más rápido	1000 m/s
Hombre más rápido	11 m/s	Satélite de comunicación en órbita	3000 m/s
Leopardo en carrera	35 m/s	Electrón en un átomo de hidrógeno	2×10^6 m/s
Automóvil más rápido	341 m/s	Luz que viaja en el vacío	3×10^8 m/s

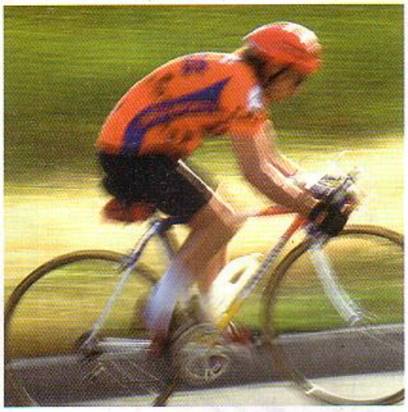
Evalúe su comprensión

Un camión viaja al oeste desde el punto A hasta el B, una distancia de 60 km. Un auto viaja al este desde el punto A hasta el C, una distancia de 30 km, se da la vuelta, y viaja al oeste hasta el punto B. El camión y el auto salen de A simultáneamente y llegan a B simultáneamente. Explique por qué el auto y el camión tienen la *misma* velocidad media.

* N. del E. En este texto se usa la abreviatura ft cuando se relaciona con la distancia en pies. Por ejemplo, 1 ft × lb = 1.356 J.



2.4 El ganador de una carrera de natación de 50 m es el nadador cuya velocidad media tiene mayor magnitud, es decir, el nadador que cubre el desplazamiento Δx de 50 m en el tiempo transcurrido Δt más corto.



2.5 Incluso al avanzar, la velocidad instantánea de este ciclista puede ser negativa: si está viajando en la dirección $-x$. En cualquier problema, nosotros decidimos cuál dirección es positiva y cuál es negativa.

2.2 | Velocidad instantánea

Hay ocasiones en que la velocidad media es lo único que necesitamos saber acerca del movimiento de una partícula. Por ejemplo, una carrera en pista recta es en realidad una competencia para determinar quién tuvo la magnitud de velocidad media, $v_{\text{med-}x}$, más grande. Se entrega el premio al competidor que pudo recorrer el desplazamiento Δx de la línea de salida a la de meta en el más corto intervalo de tiempo, Δt (Fig. 2.4).

Sin embargo, la velocidad media de una partícula durante un intervalo de tiempo no nos dice con qué rapidez, o en qué dirección, la partícula se estaba moviendo en un instante dado del intervalo. Para describir el movimiento con mayor detalle, necesitamos definir la velocidad en cualquier instante específico o punto específico del camino. Ésta es la **velocidad instantánea**, y debe definirse con cuidado.

La palabra *instante* tiene un significado un poco distinto en física que en el lenguaje cotidiano. Podemos decir "duró un instante" para referirnos a algo que duró un intervalo muy corto, pero en física un instante *no tiene* duración; es un solo valor de tiempo.

Para obtener la velocidad instantánea del auto de la figura 2.1 en el punto P_1, imaginamos mover el segundo punto P_2 cada vez más cerca a P_1. Calculamos la velocidad media $v_{\text{med-}x} = \Delta x/\Delta t$ para estos desplazamientos y lapsos cada vez más cortos. Tanto Δx como Δt se hacen muy pequeños, pero su cociente no necesariamente lo hace. En el lenguaje del cálculo, el límite de $\Delta x/\Delta t$ cuando Δt se acerca a cero es la **derivada** de x respecto a t y se escribe dx/dt. *La velocidad instantánea es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo se acerca a 0; es igual a la tasa instantánea de cambio de posición con el tiempo.* Usamos el símbolo v_x, sin "med" en el subíndice, para la velocidad instantánea en el eje x:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad \text{(velocidad instantánea, movimiento rectilíneo)} \quad (2.3)$$

Siempre suponemos que Δt es positivo, así que v_x tiene el mismo signo algebraico que Δx. Si el eje $+x$ apunta a la derecha, como en la figura 2.1, un valor positivo de v_x indica que x aumenta y el movimiento es a la derecha; una v_x negativa indica que x disminuye y el movimiento es a la izquierda. Un cuerpo puede tener x positivo y v_x negativa, o al revés; x nos dice dónde está el cuerpo, v_x nos dice cómo se mueve (Fig. 2.5).

La velocidad instantánea, igual que la media, es una cantidad vectorial. La ecuación (2.3) define su componente x, que puede ser positiva o negativa. En el movimiento rectilíneo, las demás componentes de la velocidad instantánea son cero, y en este caso llamaremos a v_x simplemente velocidad instantánea. (En el capítulo 3 veremos el caso general en el que la velocidad instantánea puede tener componentes x, y y z distintas de cero.) Al usar el término "velocidad", siempre nos referiremos a la velocidad instantánea, no a la media, a menos que se diga otra cosa.

CUIDADO

Los términos "velocidad" y "rapidez" se usan indistintamente en el lenguaje cotidiano, pero tienen diferente significado en física. **Rapidez** denota distancia recorrida dividida entre tiempo, bajo un régimen medio o instantáneo. Usaremos el símbolo v *sin* subíndice para denotar la *rapidez* instantánea, que mide la celeridad con que se mueve una partícula; la *velocidad* instantánea mide con qué rapidez *y* en qué dirección se mueve. Por ejemplo, una partícula con velocidad instantánea $v_x = 25$ m/s y otra con $v_x = -25$ m/s se mueven en direcciones opuestas con la misma rapidez instantánea de 25 m/s. La rapidez instantánea es la magnitud de la velocidad instantánea, así que no puede ser negativa.

CUIDADO La rapidez media, sin embargo, *no* es la magnitud de la velocidad media. Cuando Alexander Popov estableció un récord mundial en 1994 nadando 100.0 m en 46.74 s, su rapidez media fue de (100.0 m)/(46.74 s) = 2.139 m/s. Sin embargo, como nadó dos vueltas en una alberca de 50 m, terminó en el punto de donde partió, con un desplazamiento total de cero ¡y una *velocidad* media de cero! Tanto la rapidez media como la instantánea son escalares, no vectores, porque no contienen información de dirección.

Ejemplo 2.1 Velocidades media e instantánea

Un leopardo acecha 20 m al este del escondite de un observador (Fig. 2.6). En $t = 0$, el leopardo ataca a un antílope en un claro 50 m al este del observador. El leopardo corre en línea recta. Un análisis posterior de la grabación revela que, durante los primeros 2.0 s del ataque, la coordenada x del leopardo varía con el tiempo según la ecuación $x = 20\text{ m} + (5.0\text{ m/s}^2)t^2$. (Las unidades de los números 20 y 5.0 *deben* ser las mostradas para que la expresión sea dimensionalmente congruente.) a) Obtenga el desplazamiento del leopardo entre $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 2.0$ s. b) Calcule la velocidad media en dicho intervalo. c) Calcule la velocidad instantánea en $t_1 = 1.0$ s tomando $\Delta t = 0.1$ s, luego $\Delta t = 0.01$ s, luego $\Delta t = 0.001$ s. d) Deduzca una expresión general para la velocidad instantánea en función del tiempo, y con ella calcule v_x en $t = 1.0$ s y $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema requiere usar las definiciones de desplazamiento, velocidad media y velocidad instantánea. El uso de las dos primeras implica álgebra; la última requiere cálculo para derivar.

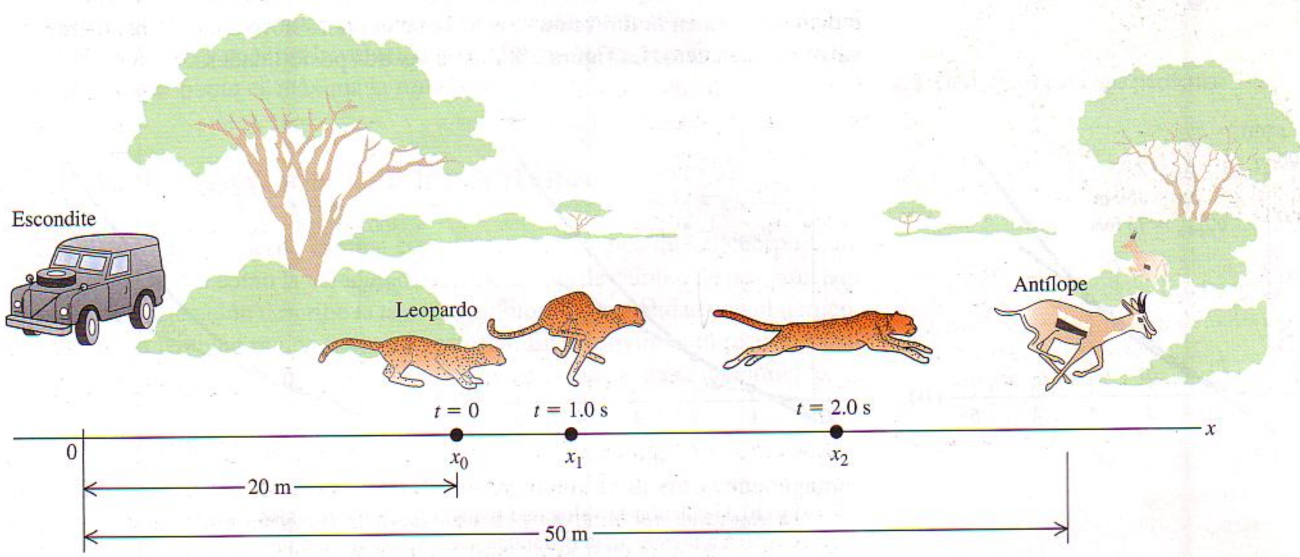
PLANTEAR: La figura 2.6 muestra el movimiento del leopardo. Para analizar este problema, usamos la ecuación (2.1) del desplazamiento, la ecuación (2.2) de la velocidad media y la ecuación (2.3) de la velocidad instantánea.

EJECUTAR: a) En $t_1 = 1.0$ s, la posición del leopardo x_1 es

$$x_1 = 20\text{ m} + (5.0\text{ m/s}^2)(1.0\text{ s})^2 = 25\text{ m}$$

En $t_2 = 2.0$ s, su posición x_2 es

$$x_2 = 20\text{ m} + (5.0\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s})^2 = 40\text{ m}$$



2.6 Leopardo agazapado que ataca a un antílope. Los animales no están a la misma escala que el eje.

El desplazamiento en este intervalo es

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 40 \text{ m} - 25 \text{ m} = 15 \text{ m}$$

b) La velocidad media durante este intervalo es

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{40 \text{ m} - 25 \text{ m}}{2.0 \text{ s} - 1.0 \text{ s}} = \frac{15 \text{ m}}{1.0 \text{ s}} = 15 \text{ m/s}$$

c) Con $\Delta t = 0.1$ s, el intervalo es de $t_1 = 1.0$ s a $t_2 = 1.1$ s. En t_2, la posición es

$$x_2 = 20 \text{ m} + (5.0 \text{ m/s}^2)(1.1 \text{ s})^2 = 26.05 \text{ m}$$

La velocidad media en este intervalo es

$$v_{\text{med-}x} = \frac{26.05 \text{ m} - 25 \text{ m}}{1.1 \text{ s} - 1.0 \text{ s}} = 10.5 \text{ m/s}$$

Siga este modelo para calcular las velocidades medias de los intervalos de 0.01 s y 0.001 s. Los resultados son 10.05 m/s y 10.005 m/s.

Al disminuir Δt, la velocidad media se acerca a 10.0 m/s, y concluimos que la velocidad instantánea en $t = 1.0$ s es de 10.0 m/s.

d) Obtenemos la velocidad instantánea en función del tiempo derivando la expresión de x respecto a t. Para cualquier n, la derivada de t^n es nt^{n-1}, así que la derivada de t^2 es $2t$. Por tanto,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (5.0 \text{ m/s}^2)(2t) = (10 \text{ m/s}^2)t$$

En $t = 1.0$ s, $v_x = 10$ m/s, como vimos en la parte (c). En $t = 2.0$ s, $v_x = 20$ m/s.

EVALUAR: Nuestros resultados muestran que el leopardo aumentó su rapidez de $t = 0$ (cuando estaba en reposo) a $t = 1.0$ s ($v_x = 10$ m/s) a $t = 2.0$ s ($v_x = 20$ m/s). Esto es lógico; el leopardo sólo cubrió 5 m durante el intervalo de $t = 0$ a $t = 1.0$ s, pero cubrió 15 m durante el intervalo de $t = 1.0$ s a $t = 2.0$ s.

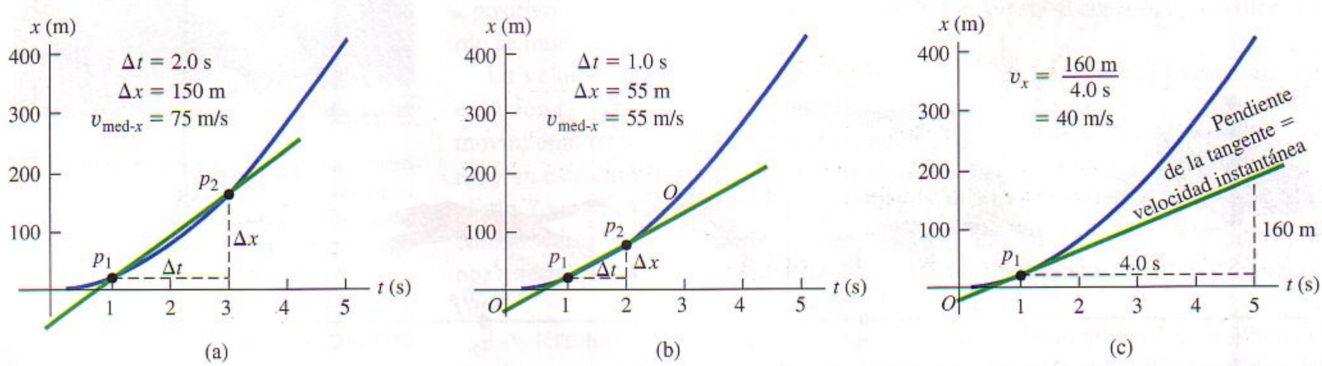
ActivPhysics ONLINE

1.1 Análisis del movimiento con diagramas

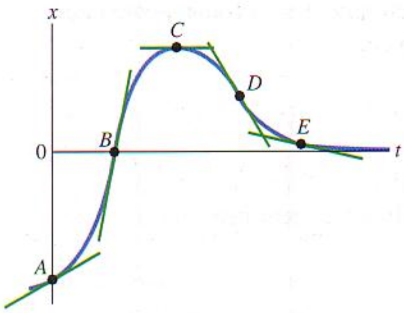
Obtención de la velocidad en una gráfica *x-t*

La velocidad de una partícula también puede obtenerse de la gráfica de la posición de la partícula en función del tiempo. Suponga que queremos conocer la velocidad del auto de la figura 2.1 en P_1. Al acercarse P_2 a P_1, el punto p_2 de la gráfica *x-t* de la figura 2.3 se acerca a p_1. Esto se muestra en las figuras 2.7a y 2.7b, donde la velocidad media se calcula en intervalos Δt cada vez más cortos. En el límite $\Delta t \to 0$, ilustrado en la figura 2.7c, la pendiente de la línea p_1p_2 es igual a la de la línea tangente a la curva en el punto p_1. *En una gráfica de posición en función del tiempo para movimiento rectilíneo, la velocidad instantánea en cualquier punto es igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.*

Si la tangente a la curva *x-t* sube hacia la derecha, como en la figura 2.7c, su pendiente es positiva, la velocidad es positiva, y el movimiento es en la dirección $+x$. Si la tangente baja a la derecha, la pendiente y la velocidad son negativas y el movimiento es en la dirección $-x$. Si la tangente es horizontal, la pendiente y la velocidad son cero. La figura 2.8 ilustra las tres posibilidades.

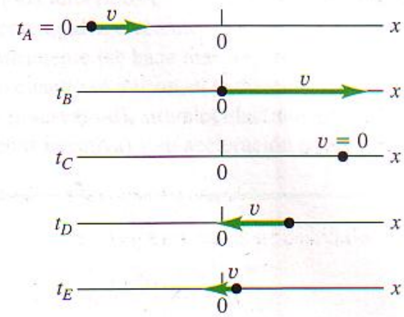


2.7 (a) y (b) Al calcular la velocidad media $v_{\text{med-}x}$ en intervalos cada vez más cortos, su valor se acerca a la velocidad instantánea. (c) La velocidad instantánea v_x en un tiempo dado es igual a la pendiente de la tangente a la curva *x-t* en ese tiempo. Obtenemos dicha pendiente dividiendo cualquier intervalo vertical (con unidades de distancia) sobre la tangente entre el intervalo horizontal correspondiente (con unidades de tiempo).



	gráfica x-t	Movimiento de la partícula
A	pendiente positiva, así que $v_x > 0$	movimiento en la dirección $+x$
B	pendiente positiva mayor, así que $v_x > 0$	movimiento en la dirección $+x$ más rápido que en A
C	pendiente cero, así que $v_x = 0$	instantáneamente en reposo
D	pendiente negativa, así que $v_x < 0$	movimiento en la dirección $-x$
E	pendiente negativa menor, así que $v_x < 0$	movimiento en la dirección $-x$ más lento que en D

(a)



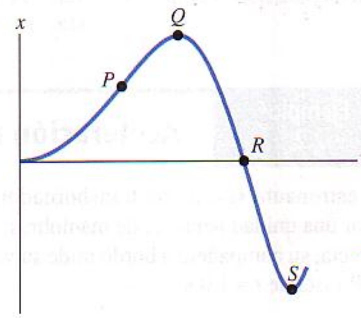
(b)

2.8 (a) La gráfica x-t del movimiento de una partícula dada. La pendiente de la tangente en cualquier punto es igual a la velocidad en ese punto. (b) Diagrama de movimiento que muestra la posición y velocidad de la partícula en los cinco instantes rotulados en el diagrama x-t. La partícula se acelera entre A y B, luego se frena entre B y C, donde se detiene momentáneamente. Luego avanza en la dirección $-x$, acelerando entre C y D y frenando entre D y E.

Observe que en la figura 2.8 se muestra el movimiento de una partícula de dos formas. La figura 2.8a es una gráfica x-t, y la 2.8b es un ejemplo de **diagrama de movimiento** que muestra la posición de la partícula en diversos instantes, como cuadros de un filme o video del movimiento de la partícula, junto con flechas que representan la velocidad de la partícula en cada instante. Ambas representaciones ayudan a entender el movimiento, y las usaremos a menudo en este capítulo. Recomendamos dibujar una gráfica x-t y un diagrama de movimiento como parte de la resolución de cualquier problema de movimiento.

Evalúe su comprensión

La figura 2.9 es una gráfica x-t del movimiento de una partícula. ¿En cuál de los puntos P, Q, R y S es positiva la velocidad v_x? ¿En cuáles es negativa? ¿En cuáles es cero? ¿En qué punto es máxima la *rapidez*?



2.9 Gráfica x-t para una partícula.

2.3 | Aceleración media e instantánea

Si la velocidad de un cuerpo cambia con el tiempo, decimos que el cuerpo tiene una *aceleración*. Así como la velocidad describe la tasa de cambio de posición con el tiempo, la aceleración describe la tasa de cambio de la velocidad con el tiempo. La aceleración también es una cantidad vectorial. En el movimiento rectilíneo, su única componente distinta de 0 está sobre el eje en el que se da el movimiento.

Aceleración media

Consideremos otra vez el movimiento de una partícula en el eje x. Supongamos que, en el tiempo t_1, la partícula está en el punto P_1 y tiene una componente x de velocidad (instantánea) v_{1x}, y en un instante posterior t_2 está en P_2 y tiene la componente x de velocidad v_{2x}. Así, la componente x de la velocidad cambia en $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$.

Definimos la **aceleración media**, $a_{\text{med-}x}$, de la partícula al moverse de P_1 a P_2 como un vector cuya componente x es Δv_x, el cambio en la componente x de la velocidad, dividido entre el intervalo de tiempo Δt:

$$a_{\text{med-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \tag{2.4}$$

(aceleración media, movimiento rectilíneo)

En el movimiento rectilíneo, normalmente llamaremos a $a_{\text{med-}x}$ aceleración media, recordando que en realidad es la componente x del vector de aceleración media. (Veremos otras componentes del vector de aceleración media en el capítulo 3.)

Si expresamos la velocidad en metros por segundo y el tiempo en segundos, la aceleración media está en metros por segundo por segundo, o (m/s)/s. Esto suele escribirse m/s^2 y se lee "metros por segundo al cuadrado".

CUIDADO ¡No confunda aceleración con velocidad! La velocidad describe el cambio de la posición de un objeto con el tiempo; nos dice con qué rapidez y en qué dirección se mueve el objeto. La aceleración describe cómo cambia la velocidad con el tiempo; es decir, nos dice cómo cambian la rapidez y la dirección del movimiento. Podría ser útil recordar la frase "aceleración es a velocidad como velocidad es a posición".

Ejemplo 2.2 Aceleración media

Una astronauta sale de un transbordador espacial en órbita para probar una unidad personal de maniobras; mientras se mueve en línea recta, su compañera a bordo mide su velocidad cada 2.0 s a partir del instante $t = 1.0$ s:

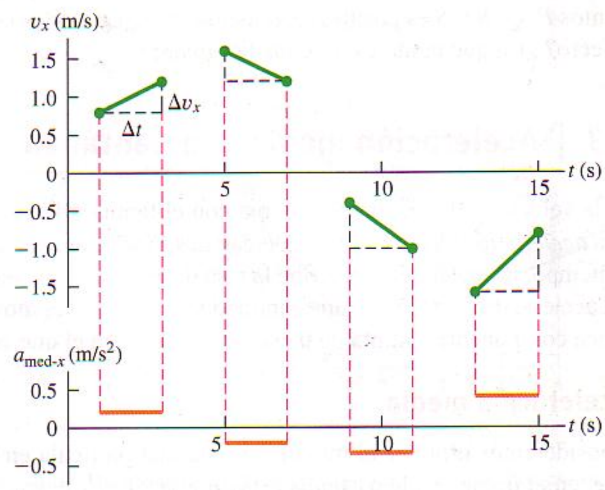
t	v_x	t	v_x
1.0 s	0.8 m/s	9.0 s	−0.4 m/s
3.0 s	1.2 m/s	11.0 s	−1.0 m/s
5.0 s	1.6 m/s	13.0 s	−1.6 m/s
7.0 s	1.2 m/s	15.0 s	−0.8 m/s

Calcule la aceleración media y diga si la rapidez aumenta o disminuye para cada uno de estos intervalos: a) $t_1 = 1.0$ s a $t_2 = 3.0$ s; b) $t_1 = 5.0$ s a $t_2 = 7.0$ s; c) $t_1 = 9.0$ s a $t_2 = 11.0$ s; d) $t_1 = 13.0$ s a $t_2 = 15.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR y PLANTEAR: Usamos la definición de aceleración media, ecuación (2.4), para determinar el valor de $a_{\text{med-}x}$ a partir del cambio de *velocidad* en cada intervalo de tiempo. Determinamos el cambio de *rapidez* en cada intervalo recordando que la rapidez v es la magnitud de la velocidad instantánea v_x.

EJECUTAR: La parte superior de la figura 2.10 grafica la velocidad en función del tiempo. La pendiente de la línea que conecta los puntos inicial y final de cada intervalo es la aceleración media $a_{\text{med-}x} = \Delta v_x/\Delta t$ para el intervalo. Los valores de $a_{\text{med-}x}$ se grafican en la parte baja de la figura. Para cada intervalo, tenemos



2.10 La pendiente de la línea que conecta dos puntos en una gráfica de velocidad contra tiempo (arriba) es la aceleración media entre esos dos puntos (abajo).

a) $a_{med\text{-}x} = (1.2\ \text{m/s} - 0.8\ \text{m/s})/(3.0\ \text{s} - 1.0\ \text{s}) = 0.2\ \text{m/s}^2$. La rapidez (magnitud de la velocidad instantánea) aumenta de 0.8 m/s a 1.2 m/s.
b) $a_{med\text{-}x} = (1.2\ \text{m/s} - 1.6\ \text{m/s})/(7.0\ \text{s} - 5.0\ \text{s}) = -0.2\ \text{m/s}^2$. La rapidez disminuye de 1.6 m/s a 1.2 m/s.
c) $a_{med\text{-}x} = [-1.0\ \text{m/s} - (-0.4\ \text{m/s})]/[11.0\ \text{s} - 9.0\ \text{s}] = -0.3\ \text{m/s}^2$. La rapidez aumenta de 0.4 m/s a 1.0 m/s.
d) $a_{med\text{-}x} = [-0.8\ \text{m/s} - (-1.6\ \text{m/s})]/[15.0\ \text{s} - 13.0\ \text{s}] = 0.4\ \text{m/s}^2$. La rapidez disminuye de 1.6 m/s a 0.8 m/s.

EVALUAR: Si la aceleración tiene la *misma* dirección (mismo signo) que la velocidad inicial, como en los intervalos a y c, la astronauta se mueve más rápidamente; cuando tiene la dirección *opuesta* (signo opuesto) como en los intervalos b y d, se frena. Al moverse en la dirección negativa con rapidez creciente (intervalo c), su velocidad disminuye algebraicamente (se hace más negativa) y su aceleración es negativa, pero cuando se mueve en la dirección negativa con rapidez decreciente (intervalo d), su velocidad aumenta algebraicamente (se hace menos negativa) y su aceleración es positiva.

Aceleración instantánea

Ya podemos definir la **aceleración instantánea** con el mismo procedimiento que seguimos para la velocidad. Considere este caso: un piloto acaba de entrar en la recta final del Grand Prix; llega al punto P_1 en el instante t_1 con velocidad v_{1x}, y pasa el punto P_2, más cerca de la meta, en t_2 con velocidad v_{2x} (Fig. 2.11).

2.11 Vehículo Grand Prix en dos puntos de la recta.

Para definir la aceleración instantánea en P_1, tomamos el segundo punto P_2 cada vez más cerca de P_1 de modo que la aceleración media se calcule en intervalos cada vez más cortos. *La aceleración instantánea es el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo se acerca a cero.* En el lenguaje del cálculo, *la aceleración instantánea es la tasa instantánea de cambio de la velocidad con el tiempo*. Así,

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \qquad (2.5)$$

(aceleración instantánea, movimiento rectilíneo)

Observe que la ecuación (2.5) es realmente la definición de la componente x del vector aceleración; en el movimiento rectilíneo, las demás componentes son cero. La aceleración instantánea desempeña un papel fundamental en las leyes de la mecánica. En adelante, al hablar de "aceleración", nos referiremos a la aceleración instantánea, no a la media.

Ejemplo 2.3 Aceleraciones media e instantánea

Suponga que la velocidad v_x del auto de la figura 2.11 en el tiempo t está dada por

$$v_x = 60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)t^2$$

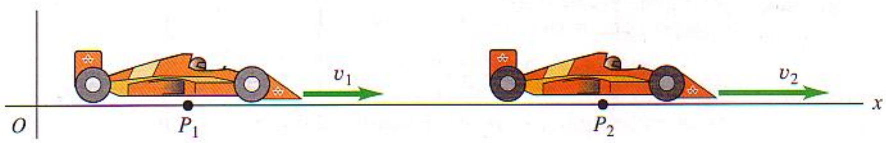
(Las unidades de los números 60 y 0.50 *deben* ser las indicadas para que la expresión sea dimensionalmente congruente.) a) Calcule el cambio de velocidad entre $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 3.0$ s. b) Calcule la aceleración media en el intervalo. c) Obtenga la aceleración instantá-

a) $a_{med\text{-}x} = (1.2\ \text{m/s} - 0.8\ \text{m/s})/(3.0\ \text{s} - 1.0\ \text{s}) = 0.2\ \text{m/s}^2$. La rapidez (magnitud de la velocidad instantánea) aumenta de 0.8 m/s a 1.2 m/s.
b) $a_{med\text{-}x} = (1.2\ \text{m/s} - 1.6\ \text{m/s})/(7.0\ \text{s} - 5.0\ \text{s}) = -0.2\ \text{m/s}^2$. La rapidez disminuye de 1.6 m/s a 1.2 m/s.
c) $a_{med\text{-}x} = [-1.0\ \text{m/s} - (-0.4\ \text{m/s})]/[11.0\ \text{s} - 9.0\ \text{s}] = -0.3\ \text{m/s}^2$. La rapidez aumenta de 0.4 m/s a 1.0 m/s.
d) $a_{med\text{-}x} = [-0.8\ \text{m/s} - (-1.6\ \text{m/s})]/[15.0\ \text{s} - 13.0\ \text{s}] = 0.4\ \text{m/s}^2$. La rapidez disminuye de 1.6 m/s a 0.8 m/s.

EVALUAR: Si la aceleración tiene la *misma* dirección (mismo signo) que la velocidad inicial, como en los intervalos a y c, la astronauta se mueve más rápidamente; cuando tiene la dirección *opuesta* (signo opuesto) como en los intervalos b y d, se frena. Al moverse en la dirección negativa con rapidez creciente (intervalo c), su velocidad disminuye algebraicamente (se hace más negativa) y su aceleración es negativa, pero cuando se mueve en la dirección negativa con rapidez decreciente (intervalo d), su velocidad aumenta algebraicamente (se hace menos negativa) y su aceleración es positiva.

Aceleración instantánea

Ya podemos definir la **aceleración instantánea** con el mismo procedimiento que seguimos para la velocidad. Considere este caso: un piloto acaba de entrar en la recta final del Grand Prix; llega al punto P_1 en el instante t_1 con velocidad v_{1x}, y pasa el punto P_2, más cerca de la meta, en t_2 con velocidad v_{2x} (Fig. 2.11).



2.11 Vehículo Grand Prix en dos puntos de la recta.

Para definir la aceleración instantánea en P_1, tomamos el segundo punto P_2 cada vez más cerca de P_1 de modo que la aceleración media se calcule en intervalos cada vez más cortos. *La aceleración instantánea es el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo se acerca a cero.* En el lenguaje del cálculo, *la aceleración instantánea es la tasa instantánea de cambio de la velocidad con el tiempo*. Así,

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \qquad (2.5)$$

(aceleración instantánea, movimiento rectilíneo)

Observe que la ecuación (2.5) es realmente la definición de la componente x del vector aceleración; en el movimiento rectilíneo, las demás componentes son cero. La aceleración instantánea desempeña un papel fundamental en las leyes de la mecánica. En adelante, al hablar de "aceleración", nos referiremos a la aceleración instantánea, no a la media.

Ejemplo 2.3 Aceleraciones media e instantánea

Suponga que la velocidad v_x del auto de la figura 2.11 en el tiempo t está dada por

$$v_x = 60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)t^2$$

(Las unidades de los números 60 y 0.50 *deben* ser las indicadas para que la expresión sea dimensionalmente congruente.) a) Calcule el cambio de velocidad entre $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 3.0$ s. b) Calcule la aceleración media en el intervalo. c) Obtenga la aceleración instantánea en $t_1 = 1.0$ s tomando como Δt 0.1 s, después 0.01 s y luego 0.001 s. d) Deduzca una expresión para la aceleración instantánea en cualquier instante y úsela para obtener la aceleración en $t = 1.0$ s y $t = 3.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo es análogo al ejemplo 2.1 de la sección 2.2. (Recomendamos repasar ese ejemplo.) Ahí, calculamos la velocidad media en intervalos cada vez más cortos considerando el cambio en el desplazamiento, y obtuvimos la velocidad instantánea diferenciando la posición en función del tiempo. En este ejemplo, determinaremos la *aceleración* media considerando cambios de *velocidad* en un intervalo de tiempo. Asimismo, obtendremos la aceleración *instantánea* diferenciando la velocidad en función del tiempo.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (2.4) de la aceleración media y la ecuación (2.5) de la aceleración instantánea.

EJECUTAR: a) Primero obtenemos la velocidad en cada instante sustituyendo t en la ecuación. En el instante $t_1 = 1.0$ s,

$$v_{1x} = 60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)(1.0\ \text{s})^2 = 60.5\ \text{m/s}$$

En el instante $t_2 = 3.0$ s,

$$v_{2x} = 60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3(3.0\ \text{s})^2 = 64.5\ \text{m/s}$$

El cambio en la velocidad, Δv_x, es

$$\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x} = 64.5\ \text{m/s} - 60.5\ \text{m/s} = 4.0\ \text{m/s}$$

El intervalo de tiempo es $\Delta t = 3.0\ \text{s} - 1.0\ \text{s} = 2.0$ s.
b) La aceleración media durante este intervalo es

$$a_{\text{med-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{4.0\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s}} = 2.0\ \text{m/s}^2$$

Durante el intervalo de $t_1 = 1.0$ s a $t_2 = 3.0$ s, la velocidad y la aceleración media tienen el mismo signo (positivo en este caso) y el auto acelera.
c) Cuando $\Delta t = 0.1$ s, $t_2 = 1.1$ s y

$$v_{2x} = 60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)(1.1\ \text{s})^2 = 60.605\ \text{m/s}$$
$$\Delta v_x = 0.105\ \text{m/s}$$
$$a_{\text{med-}x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{0.105\ \text{m/s}}{0.1\ \text{s}} = 1.05\ \text{m/s}^2$$

Repita este modelo con $\Delta t = 0.01$ s y $\Delta t = 0.001$ s; los resultados son $a_{\text{med-}x} = 1.005\ \text{m/s}^2$ y $a_{\text{med-}x} = 1.0005\ \text{m/s}^2$ respectivamente. Al reducirse Δt, la aceleración media se acerca a $1.0\ \text{m/s}^2$. Concluimos que la aceleración instantánea en $t = 1.0$ s es $1.0\ \text{m/s}^2$.
d) La aceleración instantánea es $a_x = dv_x/dt$, la derivada de una constante es cero y la derivada de t^2 es $2t$. Con esto, obtenemos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}[60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)t^2]$$
$$= (0.50\ \text{m/s}^3)(2t) = (1.0\ \text{m/s}^3)t$$

Cuando $t = 1.0$ s,

$$a_x = (1.0\ \text{m/s}^3)(1.0\ \text{s}) = 1.0\ \text{m/s}^2$$

Cuando $t = 3.0$ s,

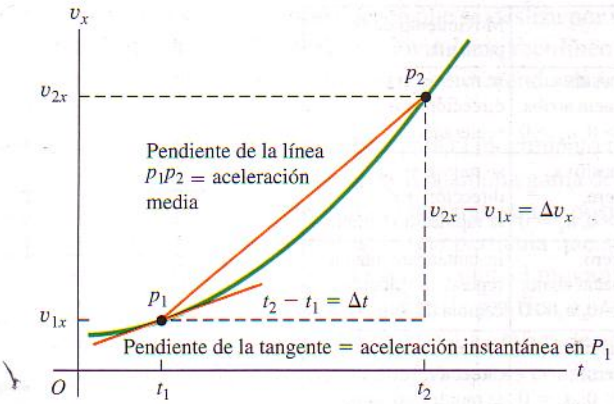
$$a_x = (1.0\ \text{m/s}^3)(3.0\ \text{s}) = 3.0\ \text{m/s}^2$$

EVALUAR: Observe que ninguno de los valores que obtuvimos en la parte (d) es igual a la aceleración media obtenida en (b). La aceleración instantánea del auto varía con el tiempo. Los ingenieros automotrices llaman a la tasa de cambio de la aceleración con el tiempo el "tirón".

Obtención de la aceleración de una gráfica v_x-t o x-t

Interpretamos las velocidades media e instantánea en términos de la pendiente de una curva de posición contra tiempo. Igualmente, podemos entender mejor los conceptos de aceleración media e instantánea graficando la velocidad instantánea v_x en el eje vertical y el tiempo t en el horizontal, o sea, una **gráfica v_x-t** (Fig. 2.12). Los puntos rotulados p_1 y p_2 corresponden a los puntos P_1 y P_2 de la figura 2.11. La aceleración media $a_{\text{med-}x} = \Delta v_x/\Delta t$ durante este intervalo es la pendiente de la línea p_1p_2. Al acercarse P_2 a P_1 en la figura 2.11, p_2 se acerca a p_1 en la figura 2.12 y la pendiente de la línea p_1p_2 se acerca a la pendiente de la tangente a la curva en el punto p_1. Así, *en una gráfica de velocidad en función del tiempo, la aceleración instantánea en cualquier punto es igual a la pendiente de la tangente de la curva en ese punto.* En la figura 2.12 la aceleración instantánea varía con el tiempo.

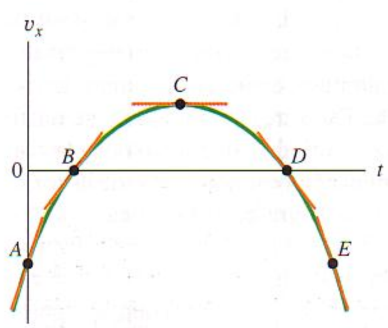
El signo algebraico de la aceleración por sí solo no nos dice si el cuerpo está acelerando o frenando; hay que comparar los signos de la velocidad y la aceleración. Si v_x y a_x tienen el *mismo* signo, el cuerpo está acelerando; si ambas son po-



2.12 Gráfica v_x-t del movimiento de la figura 2.11. La aceleración media entre t_1 y t_2 es igual a la pendiente de la línea p_1p_2. La aceleración instantánea en P_1 es igual a la pendiente de la tangente en p_1.

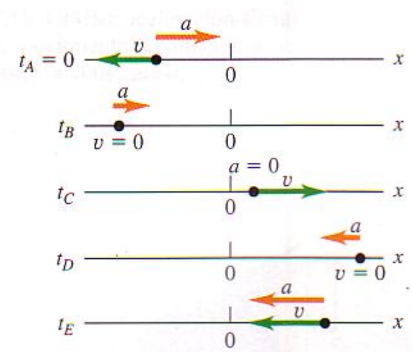
sitivas, el cuerpo se mueve en la dirección positiva con rapidez creciente. Si ambas son negativas, el cuerpo se mueve en la dirección negativa con velocidad cada vez más negativa, y la rapidez aumenta. Si v_x y a_x tienen signos *opuestos*, el cuerpo está frenando. Si v_x es positiva y a_x negativa, el cuerpo se mueve en dirección positiva con rapidez decreciente; si v_x es negativa y a_x positiva, el cuerpo se mueve en dirección negativa con velocidad cada vez menos negativa, y está frenando. La figura 2.13 ilustra estas posibilidades.

Frecuentemente podemos llamar *desaceleración* a una reducción de rapidez. Dado que esto puede implicar a_x positiva o negativa, dependiendo del signo de v_x, evitaremos este término.



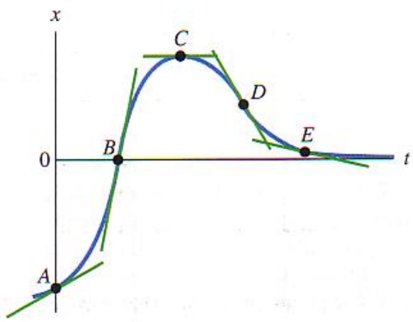
	Gráfica v_x-t	Movimiento de la partícula
A	$v_x < 0$; pendiente positiva, así que $a_x > 0$	se mueve en la dirección $-x$, frenando
B	$v_x = 0$; pendiente positiva, así que $a_x > 0$	instantáneamente en reposo, a punto de moverse en la dirección $+x$
C	$v_x > 0$; pendiente cero, así que $a_x = 0$	se mueve en la dirección $+x$, con máxima rapidez
D	$v_x = 0$; pendiente negativa, así que $a_x < 0$	instantáneamente en reposo, a punto de moverse en la dirección $-x$
E	$v_x < 0$; pendiente negativa, así que $a_x < 0$	se mueve en la dirección $-x$, acelerando

(a)



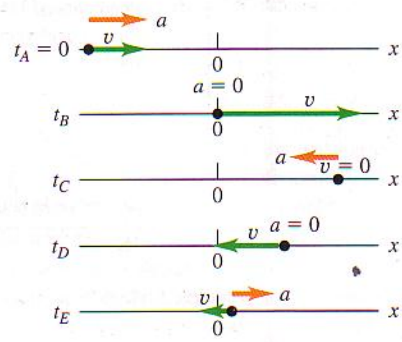
(b)

2.13 (a) Gráfica v_x-t del movimiento de una partícula (un movimiento distinto que en la Fig. 2.8). La pendiente de la tangente en cualquier punto es igual a la aceleración en ese punto. (b) Diagrama de movimiento que muestra la posición, velocidad y aceleración de la partícula en los instantes rotulados en la gráfica v_x-t. Las posiciones son congruentes con la gráfica; por ejemplo, de t_A a t_B la velocidad es negativa, así que en t_B la partícula está en un valor más negativo de x que en t_A.



	Gráfica x-t	Movimiento de la partícula
A	pendiente positiva, curvatura hacia arriba, así que $v_x > 0$, $a_x > 0$	se mueve en la dirección $+x$, acelerando
B	pendiente positiva, curvatura cero, así que $v_x > 0$, $a_x = 0$	se mueve en la dirección $+x$, la rapidez no cambia
C	pendiente cero, curvatura hacia abajo, así que $v_x = 0$, $a_x < 0$	instantáneamente en reposo, la velocidad cambia de + a −
D	pendiente negativa, curvatura cero, así que $v_x < 0$, $a_x = 0$	se mueve en la dirección $-x$, la rapidez no cambia
E	pendiente negativa, curvatura hacia arriba, así que $v_x < 0$, $a_x > 0$	se mueve en la dirección $-x$, frenando

(a)



(b)

2.14 (a) La misma gráfica x-t de la figura 2.8a. La velocidad es igual a la *pendiente* de la gráfica, y la aceleración está dada por su *concavidad* o *curvatura*. (b) Diagrama de movimiento que muestra la posición, velocidad y aceleración de la partícula en cada uno de los instantes rotulados en la gráfica x-t.

También podemos obtener la aceleración de un cuerpo a partir de una gráfica de su *posición* con el tiempo. Dado que $a_x = dv_x/dt$ y $v_x = dx/dt$, podemos escribir

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.6}$$

Es decir, a_x es la segunda derivada de x respecto a t. La segunda derivada de una función se relaciona directamente con la *concavidad* o *curvatura* de la gráfica de la función. Donde la curva x-t es cóncava hacia arriba, la aceleración es positiva y v_x aumenta; donde la curva es cóncava hacia abajo, la aceleración es negativa y v_x disminuye. Donde la gráfica x-t no tiene curvatura, como en un punto de inflexión, la aceleración es cero y v_x es constante. Estas tres posibilidades se ilustran en la figura 2.14. La curvatura de una gráfica x-t nos dice qué *signo* tiene la aceleración. Esta técnica es menos útil para determinar valores numéricos de la aceleración, porque es difícil medir con exactitud la curvatura de una gráfica.

Evalúe su comprensión

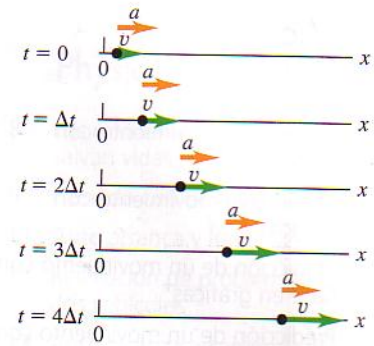
Examine otra vez la gráfica x-t de la figura 2.9 al final de la sección 2.2. ¿En cuáles de los puntos P, Q, R y S es positiva la aceleración a_x? ¿En cuáles es negativa? ¿En cuáles parece ser cero? Compare la aceleración en cada punto con la velocidad v_x en ese punto y decida si la rapidez está aumentando, disminuyendo o se mantiene constante.

2.4 | Movimiento con aceleración constante

El movimiento acelerado más sencillo es el rectilíneo con aceleración *constante*. En este caso, la velocidad cambia al mismo ritmo todo el tiempo. Se trata de una situación muy especial, pero común en la Naturaleza: como veremos en la sección que sigue, un cuerpo que cae tiene aceleración constante si los efectos del aire no son importantes. Lo mismo sucede con un cuerpo que se desliza por una pendiente o sobre una superficie horizontal áspera. El movimiento rectilíneo con aceleración casi constante se da también en la tecnología, como cuando un *jet* de combate es lanzado con catapulta desde un portaaviones.

En esta sección deduciremos ecuaciones clave para el movimiento rectilíneo con aceleración constante que nos permitirán resolver una amplia gama de problemas.

La figura 2.15 es un diagrama de movimiento que muestra la posición, velocidad y aceleración en cinco instantes distintos de una partícula que se mueve con aceleración constante. Las figuras 2.16 y 2.17 representan el movimiento con las gráficas. Puesto que la aceleración a_x es constante, la **gráfica a_x-t** (aceleración contra tiempo) de la figura 2.16 es una línea horizontal. La gráfica de velocidad contra tiempo tiene *pendiente* constante porque la aceleración es constante; por tanto, es una línea recta (Fig. 2.17).



2.15 Diagrama de movimiento para una partícula que se mueve en línea recta en la dirección +x con aceleración positiva constante a_x. Se muestran la posición, velocidad y aceleración en cinco instantes equiespaciados. La velocidad cambia lo mismo en cada intervalo porque la aceleración es constante. La posición cambia en *diferentes* cantidades en intervalos iguales porque la velocidad está cambiando.

Si la aceleración es constante, es fácil deducir ecuaciones para x y v en función del tiempo. Comencemos con la velocidad. En la ecuación (2.4) podemos sustituir la aceleración media $a_{\text{med-}x}$ por la aceleración constante (instantánea) a_x:

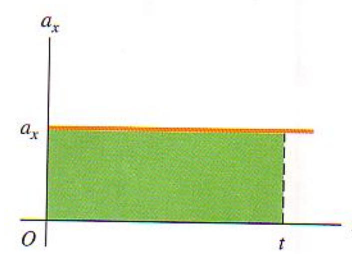
$$a_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} \tag{2.7}$$

Sean ahora $t_1 = 0$ y t_2 cualquier instante arbitrario posterior t. Simbolizamos con v_{0x} la componente x de la velocidad en el instante inicial $t = 0$; la componente x de la velocidad en el instante posterior t es v_x. Entonces, la ecuación (2.7) se convierte en

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0} \quad \text{o}$$

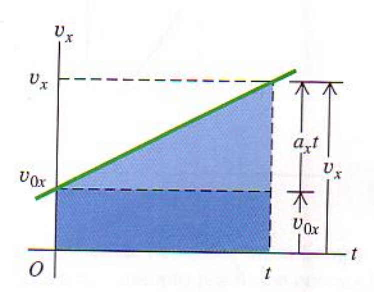
$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \tag{2.8}$$

Podemos interpretar la ecuación como sigue. La aceleración a_x es la tasa constante de cambio de velocidad, o sea, el cambio en la velocidad por unidad de tiempo. El término $a_x t$ es el producto del cambio en la velocidad por unidad de tiempo, a_x, y el intervalo de tiempo t; por tanto, es el cambio *total* de la velocidad desde el instante inicial $t = 0$ hasta un instante t posterior. La velocidad v_x en cualquier instante t es entonces la velocidad inicial v_{0x} (en $t = 0$) más el cambio en la velocidad $a_x t$. Gráficamente, podemos considerar la altura v_x de la gráfica de la figura 2.17 en un instante t como la suma de dos segmentos: uno con longitud v_{0x} igual a la velocidad inicial y otro con longitud $a_x t$ igual al cambio de velocidad durante el intervalo t. La gráfica de velocidad en función del tiempo es una línea recta con pendiente a_x que interseca el eje vertical (eje v) en v_{0x}.



2.16 Gráfica aceleración-tiempo (a_x-t) para movimiento rectilíneo con aceleración positiva constante a_x.

Otra interpretación de la ecuación (2.8) es que el cambio de velocidad $v_x - v_{0x}$ de la partícula entre $t = 0$ y un t posterior es igual al *área* bajo la gráfica a_x-t entre esos dos instantes. En la figura 2.16, el área bajo la curva a_x-t es el rectángulo verde con lado vertical a_x y lado horizontal t. El área del rectángulo es $a_x t$, que por la ecuación (2.8) es igual al cambio en velocidad $v_x - v_{0x}$. En la sección 2.6 veremos que aun si la aceleración no es constante, el cambio de velocidad durante un intervalo es igual al área bajo la curva a_x-t, aunque en tal caso la ecuación (2.8) no es válida.



2.17 Gráfica velocidad-tiempo (v_x-t) para movimiento rectilíneo con aceleración positiva constante a_x. La velocidad inicial v_{0x} también es positiva.

Queremos ahora deducir una ecuación para la posición x de una partícula que se mueve con aceleración constante. Para ello usamos dos expresiones para la velocidad media $v_{\text{med-}x}$ en el intervalo de $t = 0$ a cualquier t posterior. La primera proviene de la definición de $v_{\text{med-}x}$, ecuación (2.2), que se cumple sea constante o no la aceleración. La *posición inicial* es la posición en $t = 0$, denotada con x_0. La po-

ActivPhysics ONLINE

1.1 Análisis del movimiento con diagramas
1.2 Análisis del movimiento con gráficas
1.3 Predicción de un movimiento con base en gráficas
1.4 Predicción de un movimiento con base en ecuaciones
1.5 Estrategias para resolver problemas de cinemática
1.6 Esquiador en competencia de descenso

sición en el t posterior es simplemente x. Así, para el intervalo $\Delta t = t - 0$ y el desplazamiento correspondiente $\Delta x = x - x_0$, la ecuación (2.2) da

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x - x_0}{t} \qquad (2.9)$$

También podemos obtener otra expresión para $v_{\text{med-}x}$ que es válida sólo si a es constante, de modo que la gráfica v_x-t sea una línea recta (como en la Fig. 2.17) y la velocidad cambie a ritmo constante. En este caso, la velocidad media en cualquier intervalo es sólo el promedio de las velocidades al principio y al final del intervalo. Para el intervalo de 0 a t,

$$v_{\text{med-}x} = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \qquad (2.10)$$

(Esto *no* se cumple si la aceleración varía y la gráfica v_x-t es una curva, como en la Fig. 2.13). También sabemos que, con aceleración constante, la velocidad v_x en un instante t está dada por la ecuación (2.8). Sustituyendo esa expresión por v_x en la ecuación (2.10),

$$v_{\text{med-}x} = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_{0x} + a_x t)$$
$$= v_{0x} + \frac{1}{2}a_x t \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \qquad (2.11)$$

Por último, igualamos las ecuaciones (2.9) y (2.11) y simplificamos el resultado:

$$v_{0x} + \frac{1}{2}a_x t = \frac{x - x_0}{t} \qquad \text{o}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \qquad (2.12)$$

Esta ecuación dice que, en el instante inicial $t = 0$, una partícula está en x_0 y tiene velocidad v_{0x}; su nueva posición x en un t posterior es la suma de tres términos: su posición inicial x_0, más la distancia $v_{0x}t$ que recorrería si su velocidad fuera constante y una distancia adicional $\frac{1}{2}a_x t^2$ causada por el cambio de velocidad.

Así como el cambio de velocidad de la partícula es igual al área bajo la gráfica a_x-t, el desplazamiento —es decir, el cambio de posición— es igual al área bajo la gráfica v_x-t. Específicamente, el desplazamiento $x - x_0$ de la partícula entre $t = 0$ y cualquier instante t posterior es igual al área bajo la curva v_x-t entre esos dos instantes. En la figura 2.17 el área se dividió en un rectángulo oscuro con lado vertical v_{0x} y lado horizontal t y un triángulo rectángulo claro con lado vertical $a_x t$ y lado horizontal t. El área del rectángulo es $v_{0x}t$, y la del triángulo, $\frac{1}{2}(a_x t)(t) = \frac{1}{2}a_x t^2$, así que el área total bajo la curva es

$$x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

lo que concuerda con la ecuación (2.12).

El desplazamiento durante un intervalo siempre puede obtenerse del área bajo la curva v_x-t, incluso si la aceleración *no* es constante, aunque en tal caso la ecuación (2.12) no es válida. (Demostraremos esto en la sección 2.6.)

Podemos comprobar si las ecuaciones (2.8) y (2.12) son congruentes con el supuesto de aceleración constante derivando la ecuación (2.12). Obtenemos

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} + a_x t$$

que es la ecuación (2.8). Diferenciando otra vez, tenemos simplemente

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x$$

como era de esperar.

En muchos problemas, es útil tener una relación entre posición, velocidad y aceleración que no incluya el tiempo. Para obtenerla, despejamos t en la ecuación (2.8), sustituimos la expresión resultante en la ecuación (2.12) y simplificamos:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

$$x = x_0 + v_{0x}\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right) + \frac{1}{2}a_x\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right)^2$$

Transferimos el término x_0 al miembro izquierdo y multiplicamos la ecuación por $2a_x$:

$$2a_x(x - x_0) = 2v_{0x}v_x - 2v_{0x}^2 + v_x^2 - 2v_{0x}v_x + v_{0x}^2$$

Por último, al simplificar obtenemos

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \quad (2.13)$$

Podemos obtener una relación más útil igualando dos expresiones para $v_{\text{med-}x}$, ecuaciones (2.9) y (2.10) y multiplicando por t. Obtenemos

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right)t \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \quad (2.14)$$

Observe que la ecuación (2.14) no contiene la aceleración a_x. Esta ecuación es útil cuando a_x es constante pero se desconoce su valor.

Las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) son las *ecuaciones del movimiento con aceleración constante*. Con ellas, podemos resolver *cualquier* problema de cinemática que implique movimiento rectilíneo de una partícula con aceleración constante.

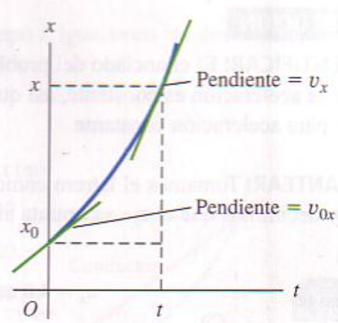
La figura 2.18 es una gráfica de la coordenada x en función del tiempo para movimiento con aceleración constante; es decir, es la gráfica de la ecuación (2.12); la gráfica x-t para aceleración constante siempre es una *parábola*. La curva interseca el eje vertical (x) en x_0, la posición en $t = 0$. La pendiente de la tangente en $t = 0$ es v_{0x}, la velocidad inicial, y la pendiente de la tangente en cualquier t es la velocidad v_x en ese instante. La gráfica de la figura 2.18 es cóncava hacia arriba. La pendiente y la velocidad aumentan continuamente, así que la aceleración es positiva. Si a_x es negativa, la gráfica x-t es una parábola cóncava hacia abajo.

En el caso particular de movimiento con aceleración constante ilustrado en la figura 2.15 y graficado en las figuras 2.16, 2.17 y 2.18, los valores de x_0, v_{0x} y a_x son positivos. Vuelva a dibujar las figuras para los casos en que una, dos o las tres cantidades son negativas.

Un caso especial de movimiento con aceleración constante se da cuando la aceleración es *cero*. La velocidad es constante, y las ecuaciones del movimiento se convierten sencillamente en

$$v_x = v_{0x} = \text{constante}$$
$$x = x_0 + v_x t$$

1.8 Los cinturones de seguridad salvan vidas
1.9 Frenado con derrape
1.11 Auto arranca y luego se para
1.12 Resolución de problemas con dos vehículos
1.13 Auto alcanza a camión
1.14 Cómo evitar un choque por atrás



2.18 Gráfica de posición contra tiempo (x-t) para movimiento rectilíneo con aceleración constante. Esta gráfica se refiere al mismo movimiento que las figuras 2.15, 2.16 y 2.17. En este caso, la posición inicial x_0, la velocidad inicial v_{0x} y la aceleración a_x son positivas.

Estrategia para resolver problemas

Movimiento con aceleración constante

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* En casi todos los problemas de movimiento rectilíneo, podrá usar las ecuaciones de aceleración constante, aunque a veces se topará con situaciones en las que la aceleración *no es* constante. En tales casos, necesitará otra estrategia (véase sección 2.6).

PLANTEAR *el problema siguiendo estos pasos:*

1. *Es preciso* decidir al abordar un problema dónde está el origen de las coordenadas y cuál dirección es positiva. El criterio suele ser la comodidad. Lo más fácil suele ser colocar la partícula en el origen en $t = 0$; así, $x_0 = 0$. Siempre es útil un diagrama de movimiento que muestre estas decisiones y algunas posiciones posteriores de la partícula.
2. Recuerde que la dirección positiva del eje determina automáticamente las direcciones positivas de la velocidad y la aceleración. Si x es positiva a la derecha del origen, v_x y a_x también son positivas hacia la derecha.
3. Primero replantee el problema con palabras y luego traduzca su descripción a símbolos y ecuaciones. *¿Cuándo* llega la partícula a cierto punto (cuánto vale t)? *¿Dónde* está la partícula cuando tiene cierta velocidad (o sea, cuánto vale x cuando v_x tiene ese valor)? El ejemplo 2.4 pregunta "¿Dónde está el motociclista cuando su velocidad es de 25 m/s?" En símbolos, esto es "¿Cuánto vale x cuando $v_x = 25$ m/s?"
4. Haga una lista de las cantidades como x, x_0, v_x, v_{0x}, a_x y t. En general, algunas serán conocidas y otras no. Escriba los valores de las conocidas y decida cuáles de las variables son las incógnitas. No pase por alto información implícita. Por ejemplo, "un auto está parado ante un semáforo" implica $v_{0x} = 0$.

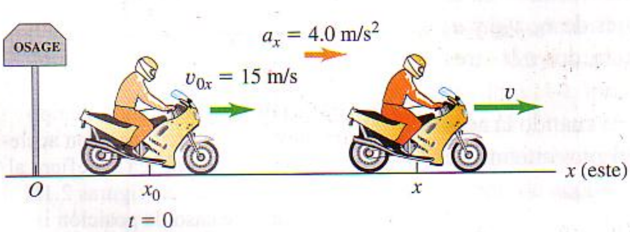
EJECUTAR *la solución:* Escoja una ecuación de las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) que contenga sólo una de las incógnitas. Despeje la incógnita usando sólo símbolos, sustituya los valores conocidos y calcule el valor de la incógnita. A veces tendrá que resolver dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas.

EVALUAR *la respuesta:* Examine sus resultados para ver si son lógicos. ¿Están dentro del intervalo general esperado de valores?

Ejemplo 2.4

Cálculos de aceleración constante

Un motociclista que viaja al este cruza una pequeña ciudad de Iowa y acelera apenas pasa el letrero que marca el límite de la ciudad (Fig. 2.19). Su aceleración constante es de 4.0 m/s^2. En $t = 0$, está a 5.0 m al este del letrero, moviéndose al este a 15 m/s. a) Calcule su posición y velocidad en $t = 2.0$ s. b) ¿Dónde está el motociclista cuando su velocidad es de 25 m/s?



2.19 Motociclista viajando con aceleración constante.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El enunciado del problema nos dice explícitamente que la aceleración es constante, así que podemos usar las ecuaciones para aceleración constante.

PLANTEAR: Tomamos el letrero como origen de coordenadas ($x = 0$) y decidimos que el eje $+x$ apunta al este (Fig. 2.19). En $t = 0$, la posición inicial es $x_0 = 5.0$ m y la velocidad inicial es $v_{0x} = 15$ m/s. La aceleración constante es $a_x = 4.0$ m/s^2. Las variables desconocidas en la parte (a) son: los valores de la posición x y la velocidad v_x en el instante posterior $t = 2.0$ s; la incógnita en la parte (b) es el valor de x cuando $v_x = 25$ m/s.

EJECUTAR: a) Podemos hallar la posición en $t = 2.0$ s usando la ecuación (2.12) que da la posición x en función del tiempo t:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x} + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ &= 5.0\text{ m} + (15\text{ m/s})(2.0\text{ s}) + \frac{1}{2}(4.0\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s})^2 \\ &= 43\text{ m} \end{aligned}$$

Podemos hallar la velocidad en ese instante con la ecuación (2.8), que da la velocidad v_x en función del tiempo t:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t \\ &= 15\text{ m/s} + (4.0\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s}) = 23\text{ m/s} \end{aligned}$$

b) Para la solución de la parte (a), vemos que la velocidad es $v_x = 25$ m/s en un instante posterior a 2.0 s y a más de 43 m del letrero. Por la ecuación (2.13), tenemos

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

Despejando x y sustituyendo los valores conocidos, obtenemos

$$x = x_0 + \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x} \quad \text{así,}$$

$$= 5.0\text{ m} + \frac{(25\text{ m/s})^2 - (15\text{ m/s})^2}{2(4.0\text{ m/s}^2)}$$

$$= 55\text{ m}$$

O bien, podemos usar la ecuación (2.18) para averiguar en qué instante $v_x = 25$ m/s:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad \text{así}$$

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{25\text{ m/s} - 15\text{ m/s}}{4.0\text{ m/s}^2}$$

$$= 2.5\text{ s}$$

Después, por la ecuación (2.12), tenemos

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$= 5.0\text{ m} + (15\text{ m/s})(2.5\text{ s}) + \frac{1}{2}(4.0\text{ m/s}^2)(2.5\text{ s})^2$$

$$= 55\text{ m}$$

EVALUAR: ¿Son lógicos los resultados? Según lo que calculamos en la parte (a), el motociclista acelera de 15 m/s (unos 54 km/h) a 23 m/s (unos 83 km/h) en 2.0 s, mientras recorre una distancia de 38 m. El resultado de la parte (b) nos dice que, después de otros 0.5 s, el motociclista ha avanzado otros 12 m y ha acelerado a 25 m/s (90 km/h). Ésta es una aceleración considerable, pero una moto de alto rendimiento bien puede alcanzarla.

Ejemplo 2.5 Dos cuerpos con diferente aceleración

Un conductor que viaja a velocidad constante de 15 m/s pasa por un cruce de escolares cuyo límite de velocidad es de 10 m/s. En ese momento, un policía en su motocicleta que está parado en el cruce, arranca para perseguir al infractor, con aceleración constante de 3.0 m/s² (Fig. 2.20a). a) ¿Cuánto tiempo pasa antes de que el policía alcance al infractor? b) ¿A qué velocidad va el policía en ese instante? c) ¿Qué distancia total ha recorrido cada vehículo hasta ahí?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El policía y el conductor se mueven con aceleración constante (cero en el caso del conductor), así que podemos usar las fórmulas que deducimos.

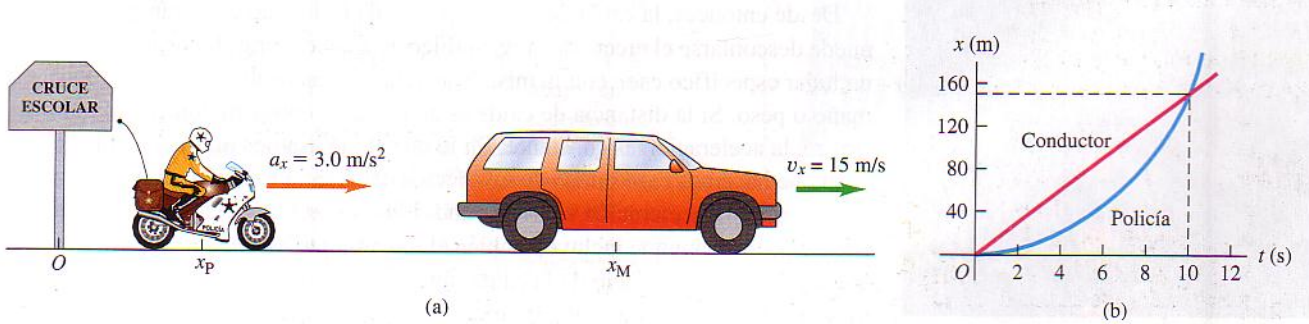
PLANTEAR: Tomamos como origen el cruce, así que $x_0 = 0$ para ambos, y tomamos como dirección positiva a la derecha. Sea x_P la posición del policía y x_M la del conductor en cualquier instante. Las velocidades iniciales son $v_{P0x} = 0$ para el policía y $v_{M0x} = 15$ m/s para el conductor; las respectivas aceleraciones constantes son $a_{Px} = 3.0\text{ m/s}^2$ y $a_{Mx} = 0$. Nuestra incógnita en la parte (a) es el tiempo tras el cual el policía alcanza al conductor, es decir, cuando los dos vehículos están en la misma posición. En la parte (b) nos interesa la rapidez v del policía (la magnitud de su velocidad) en el tiempo obtenido en la parte (a). En la parte (c) nos interesa la posición de cualesquiera de los vehículos en ese tiempo. Por tanto, usaremos la ecuación (2.12) (que relaciona posición y tiempo) en las partes (a) y (c), y la ecuación (2.8) (que relaciona velocidad y tiempo) en la parte (b).

EJECUTAR: a) Buscamos el valor del tiempo t cuando el conductor y el policía están en la misma posición: $x_M = x_P$. Aplicando la ecuación (2.12), $x = x_0 + v_{0x}t + (1/2)a_x t^2$, a cada vehículo, tenemos

$$x_M = 0 + v_{M0x}t + \frac{1}{2}(0)t^2 = v_{M0x}t$$

$$x_P = 0 + (0)t + \frac{1}{2}a_{Px}t^2 = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$$

Puesto que $x_M = x_P$ en el tiempo t, igualamos las dos expresiones y despejamos t:



2.20 (a) Movimiento con aceleración constante que alcanza a movimiento con velocidad constante. (b) Gráfica de x vs. t para cada vehículo.

$$v_{M0x}t = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$$

$$t = 0 \quad \text{o} \quad t = \frac{2v_{M0x}}{a_{Px}} = \frac{2(15\text{ m/s})}{3.0\text{ m/s}^2} = 10\text{ s}$$

Hay *dos* instantes en que los vehículos tienen la misma coordenada x. El primero, $t = 0$, es cuando el conductor pasa por el cruce donde está la motocicleta. El segundo, $t = 10$ s, es cuando el policía alcanza al conductor.

b) Queremos la magnitud de la velocidad del policía v_{Px} en el instante t obtenido en (a). Su velocidad en cualquier momento está dada por la ecuación (2.8):

$$v_{Px} = v_{P0x} + a_{Px}t = 0 + (3.0\text{ m/s}^2)t$$

así que cuando $t = 10$ s, $v_{Px} = 30$ m/s. Cuando el policía alcanza al conductor, va al doble de su velocidad.

c) En 10 s, la distancia recorrida por el conductor es

$$x_M = v_{M0x}t = (15\text{ m/s})(10\text{ s}) = 150\text{ m}$$

y la distancia que el policía recorre es

$$x_P = \frac{1}{2}a_{Px}t^2 = \frac{1}{2}(3.0\text{ m/s}^2)(10\text{ s})^2 = 150\text{ m}$$

Esto comprueba que cuando el policía alcanza al conductor, ambos han recorrido la misma distancia.

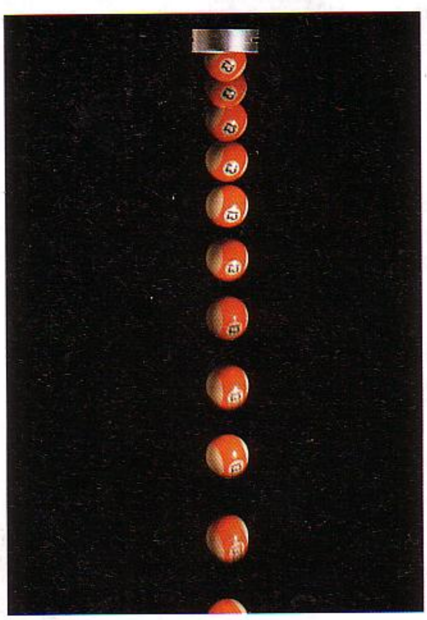
EVALUAR: La figura 2.20b muestra las gráficas de x contra t para ambos vehículos. Aquí vemos también que hay dos instantes en que la posición es la misma (donde se cruzan las curvas). En ninguno de ellos los dos vehículos tienen la misma velocidad (las curvas se cruzan con distinta pendiente). En $t = 0$, el policía está en reposo; en $t = 10$ s, la rapidez del policía es el doble de la del conductor.

En una persecución real, el policía aceleraría a una rapidez mayor que la del conductor y luego frenaría para tener la misma velocidad al alcanzarlo. No tratamos este caso aquí porque implica cambio de aceleración (pero véase el problema 2.68).

Evalúe su comprensión

La figura 2.20b es una gráfica x-t para cada vehículo del ejemplo 2.5. Dibuje una gráfica v_x-t para cada vehículo. ¿Hay un momento en que el conductor y el policía tengan la misma velocidad? ¿En qué tiempo sucede?

2.5 | Cuerpos en caída libre



2.21 Fotografía con múltiples destellos de una pelota en caída libre.

El ejemplo más conocido de movimiento con aceleración (casi) constante es la caída de un cuerpo bajo la influencia de la atracción gravitacional de la Tierra. Esto ha interesado a filósofos y científicos desde la antigüedad. En el siglo IV a.C, Aristóteles pensaba (erróneamente) que los objetos pesados caen con mayor rapidez que los ligeros, en proporción a su peso. Diecinueve siglos después, Galileo afirmó que los cuerpos caían con una aceleración constante e independiente de su peso. En la sección 1.1 mencionamos que, según la leyenda, Galileo experimentó dejando caer balas desde la Torre Inclinada de Pisa.

Desde entonces, la caída de los cuerpos se ha estudiado con gran precisión. Si puede descontarse el efecto del aire, Galileo está en lo cierto; todos los cuerpos en un lugar específico caen con la misma aceleración hacia abajo, sea cual sea su tamaño o peso. Si la distancia de caída es pequeña en comparación con el radio terrestre, la aceleración es constante. En lo que sigue usamos un modelo idealizado en el que hacemos caso omiso de los efectos del aire, la rotación terrestre y la disminución de la aceleración con la altitud. Llamamos a este movimiento idealizado **caída libre,** aunque incluye también el movimiento ascendente. (En el capítulo 3 extenderemos el estudio de la caída libre para incluir el movimiento de proyectiles, que además se mueven horizontal y verticalmente.)

La figura 2.21 es una foto de una pelota que cae tomada con una lámpara estroboscópica que produce destellos intensos a intervalos iguales. Cada destello es tan corto (millonésimas de segundo) que casi no se borran las imágenes de los objetos en movimiento, aunque éste sea rápido. En cada destello, la película registra la posición de la pelota. Como los intervalos entre destellos son iguales, la velocidad media de la pelota entre dos destellos es proporcional a la distancia entre las imágenes correspondientes en la foto. El aumento en las distancias muestra que la velocidad cambia continuamente; la pelota está acelerando hacia abajo. Al medir constatamos que el cambio de velocidad es el mismo en cada intervalo, así que la aceleración de la pelota en caída libre es constante.

ActivPhysics ONLINE

1.7 Se deja caer limonada desde un globo aerostático

1.10 Caída de un saltador con garrocha

La aceleración constante de un cuerpo en caída libre se llama **aceleración debida a la gravedad**, y denotamos su magnitud con g. Por lo regular, usaremos el valor aproximado de g cerca de la superficie terrestre:

$$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2} = 980\ \mathrm{cm/s^2}$$
$$= 32\ \mathrm{ft/s^2} \qquad \text{(valor aproximado cerca de la superficie terrestre)}$$

El valor exacto varía según el lugar, así que normalmente sólo lo daremos con dos cifras significativas. Dado que g es la magnitud de una cantidad vectorial, siempre es *positiva*. En la superficie de la Luna, la aceleración debida a la gravedad se debe a la fuerza de atracción de la Luna, no de la Tierra, y $g = 1.6\ \mathrm{m/s^2}$. Cerca de la superficie del Sol, $g = 270\ \mathrm{m/s^2}$.

En los ejemplos que siguen usamos las ecuaciones que deducimos en la sección 2.4. Sugerimos al lector repasar las estrategias de resolución de problemas de esa sección antes de estudiar estos ejemplos.

Ejemplo 2.6 Moneda en caída libre

Se deja caer una moneda de un euro desde la Torre Inclinada de Pisa; parte del reposo y cae libremente. Calcule su posición y velocidad después de 1.0, 2.0 y 3.0 s.

SOLUCIÓN

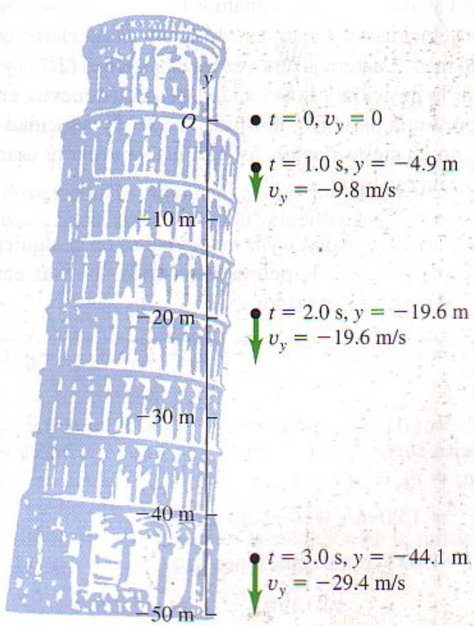
IDENTIFICAR: "Cae libremente" significa "tiene una aceleración constante debida a la gravedad", así que podemos usar las ecuaciones para aceleración constante en la determinación de nuestras incógnitas.

PLANTEAR: Tomaremos el origen O como el punto de partida, el eje de coordenadas es vertical y la dirección hacia arriba es positiva (Fig. 2.22). Como el eje de coordenadas es vertical, llamaremos a la coordenada y en vez de x. Sustituiremos todas las x de las ecuaciones de aceleración constante por y. La coordenada inicial y_0 y la velocidad inicial v_{0y} son cero. La aceleración es hacia abajo (en la dirección y negativa), así que $a_y = -g = -9.8\ \mathrm{m/s^2}$. (Recuerde que, por definición, g *siempre* es positiva.) Por tanto, nuestras incógnitas son los valores de y y v_y en los tres instantes especificados. Para obtenerlos usamos las ecuaciones (2.12) y (2.8), sustituyendo x por y.

EJECUTAR: En un instante arbitrario t, la posición y la velocidad son

$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0 + \frac{1}{2}(-g)t^2 = (-4.9\ \mathrm{m/s^2})t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0 + (-g)t = (-9.8\ \mathrm{m/s^2})t$$



2.22 Posición y velocidad de una moneda en caída libre desde el reposo.

Cuando $t = 1.0$ s, $y = (-4.9 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s})^2 = -4.9$ m y $v_y = (-9.8 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s}) = -9.8$ m/s; después de un segundo, la moneda está 4.9 m debajo del origen (y es negativa) y tiene una velocidad hacia abajo (v_y es negativa) con magnitud de 9.8 m/s.

La posición y la velocidad a los 2.0 y 3.0 s se obtienen de la misma forma. Los resultados se muestran en la figura 2.22; verifique los valores numéricos.

EVALUAR: Todos los valores que obtuvimos para v_y son negativos porque decidimos que el eje $+y$ apuntaría hacia arriba, pero bien podríamos haber decidido que apuntara hacia abajo. En tal caso, la aceleración habría sido $a_y = +g$ y habríamos obtenido valores positivos para v_y. No importa qué eje escoja; sólo asegúrese de decirlo claramente en su solución y confirme que la aceleración tenga el signo correcto.

Ejemplo 2.7 Movimiento ascendente y descendente en caída libre

Imagine que usted lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio. La pelota abandona la mano en un punto a la altura del barandal de la azotea con velocidad ascendente de 15.0 m/s, quedando en caída libre. Al bajar, la pelota libra apenas el barandal. En este lugar, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Obtenga a) la posición y velocidad de la pelota 1.00 s y 4.00 s después de soltarla; b) la velocidad cuando la pelota está 5.00 m sobre el barandal; c) la altura máxima alcanzada y el instante en que se alcanza; y d) la aceleración de la pelota en su altura máxima.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las palabras "caída libre" en el enunciado del problema implican que la aceleración es constante y debida a la gravedad. Las incógnitas son la posición [en las partes (a) y (c)], la velocidad [en las partes (a) y (b)] y la aceleración [en la parte (d)].

PLANTEAR: En la figura 2.23, la trayectoria descendente se muestra desplazada un poco a la derecha por claridad. Sea el origen el barandal, donde la pelota abandona la mano, y sea la dirección positiva hacia arriba. Primero, reunamos los datos. La posición inicial y_0 es 0, la velocidad inicial v_{0y} es +15.0 m/s y la aceleración es $a_y = g = -9.80 \text{ m/s}^2$. Usaremos otra vez las ecuaciones (2.12) y (2.8) para calcular la posición y la velocidad, respectivamente, en función del tiempo. En la parte (b), nos piden hallar la velocidad en cierta *posición*, no en cierto *tiempo*, así que nos convendrá usar la ecuación (2.13) en esa parte.

EJECUTAR: a) La posición y y la velocidad v_Y en cualquier instante t una vez que se suelta la pelota están dadas por las ecuaciones (2.12) y (2.8), cambiando x por y:

$$y = y_0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$
$$= (0) + (15.0 \text{ m/s})t + \frac{1}{2}(-9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$
$$v_y = v_{0y} + a_y t = v_{0y} + (-g)t$$
$$= 15.0 \text{ m/s} + (-9.80 \text{ m/s}^2)t$$

Cuando $t = 1.00$ s, estas ecuaciones dan

$$y = +10.1 \text{ m} \qquad v_y = +5.2 \text{ m/s}$$

La pelota está 10.1 m sobre el origen (y es positiva) y se mueve hacia arriba (v_y es positiva) con rapidez de 5.2 m/s, menor que la rapidez inicial de 15.0 m/s, como se esperaba.

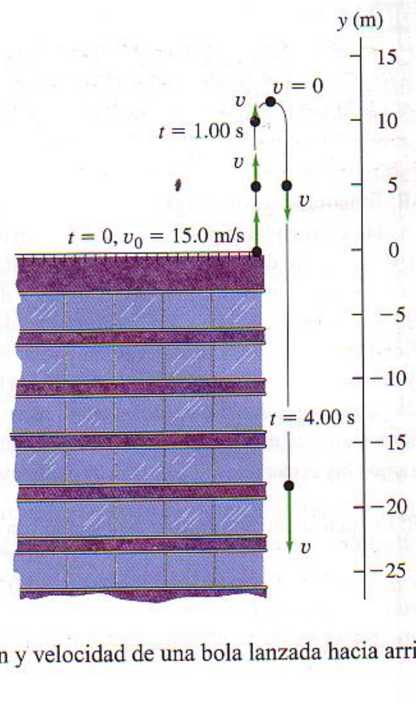
Cuando $t = 4.00$ s, las ecuaciones para y y v_y en función del tiempo t dan

$$y = -18.4 \text{ m} \qquad v_y = -24.2 \text{ m/s}$$

La pelota pasó su punto más alto y está 18.4 m *debajo* del origen (y es negativa); tiene velocidad *hacia abajo* (v_y es negativa) de magnitud 24.2 m/s, mayor que la rapidez inicial, lo que es lógico para los puntos por debajo del punto de lanzamiento. Para obtener estos resultados, no necesitamos conocer el punto más alto alcanzado ni cuándo se alcanzó; las ecuaciones dan la posición y la velocidad en cualquier instante, esté subiendo la pelota o bajando.

b) La velocidad v_y en cualquier posición y está dada por la ecuación (2.13) cambiando las x por y:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_{0y}^2 + 2(-g)(y - 0)$$
$$= (15.0 \text{ m/s})^2 + 2(-9.80 \text{ m/s}^2)y$$



2.23 Posición y velocidad de una bola lanzada hacia arriba.

Con la bola a 5.00 m sobre el origen, $y = +5.00$ m, así que

$$v_y^2 = (15.0\text{ m/s})^2 + 2(-9.80\text{ m/s}^2)(5.00\text{ m}) = 127\text{ m}^2/\text{s}^2$$
$$v_y = \pm 11.3\text{ m/s}$$

Obtenemos *dos* valores de v_y, uno positivo y uno negativo, pues la pelota pasa dos veces por este punto, una subiendo y otra bajando. La velocidad de subida es +11.3 m/s, y de bajada, −11.3 m/s.

c) En el punto más alto, la pelota deja de subir (v_y positiva) y comienza a bajar (v_y negativa); en el instante en que llega al punto más alto, $v_y = 0$. La altura máxima y_1 puede obtenerse de dos formas. La primera es usar la ecuación (2.13) y sustituir $v_y = 0$, $y_0 = 0$ y $a_y = -g$:

$$0 = v_{0y}^2 + 2(-g)(y_1 - 0)$$
$$y_1 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(15.0\text{ m/s})^2}{2(9.80\text{ m/s}^2)} = +11.5\text{ m}$$

La segunda es calcular el instante en que $v_y = 0$ usando la ecuación (2.8), $v_y = v_{0y} + a_y t$, y sustituir este valor de t en la ecuación (2.12) para obtener la posición en ese instante. Por la ecuación (2.8), el instante t_1 en que la bola llega al punto más alto es

$$v_y = 0 = v_{0y} + (-g)t_1$$
$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{15.0\text{ m/s}}{9.80\text{ m/s}^2} = 1.53\text{ s}$$

Sustituyendo este valor de t en la ecuación (2.12), tenemos

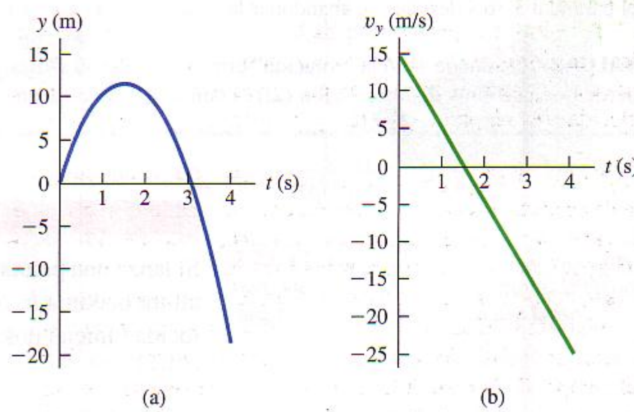
$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = (0) + (15\text{ m/s})(1.53\text{ s})$$
$$+ \frac{1}{2}(-9.8\text{ m/s}^2)(1.53\text{ s})^2 = +11.5\text{ m}$$

Observe que con la primera forma no es necesario calcular primero el tiempo.

d) **CUIDADO** Es un error común pensar que en el punto más alto del movimiento la velocidad es cero y la aceleración es cero. Si fuera así, ¡la pelota quedaría suspendida en el punto más alto eternamente! Recuerde que la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad. Si la aceleración fuera cero en el punto más alto, la velocidad de la pelota ya no cambiaría y, al estar instantáneamente en reposo, permanecería en reposo por siempre.

La verdad es que, en el punto más alto, la aceleración sigue siendo $a_y = -g = -9.80$ m/s^2, la misma que cuando está subiendo y cuando está bajando. La pelota se detiene un instante en el punto más alto, pero su velocidad está cambiando continuamente, de valores positivos a negativos, pasando por 0.

EVALUAR: Una forma útil de verificar cualquier problema de movimiento es dibujar las gráficas de posición y de velocidad en función del tiempo. La figura 2.24 muestra esas gráficas para este problema. Observe que la gráfica v_y-t tiene pendiente negativa constante. Ello implica que la aceleración es negativa (hacia abajo) al subir, en el punto más alto y al bajar.



2.24 (a) Posición y (b) velocidad en función del tiempo para una pelota lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de 15 m/s.

Ejemplo 2.8 ¿Dos soluciones o una?

Determine el instante en que la pelota del ejemplo 2.7 está 5.00 m por debajo del barandal.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Otra vez escogemos el eje y como en la figura 2.23, así que y_0, v_{0y} y $a_y = -g$ tienen los mismos valores que en el ejemplo 2.7. Otra vez, la ecuación (2.12) da y en función de t:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

Queremos despejar t con $y = -5.00$ m. Puesto que la ecuación incluye t^2, es una ecuación *cuadrática* en t.

EJECUTAR: Primero replanteamos la ecuación en la forma cuadrática estándar para x desconocida, $Ax^2 + Bx + C = 0$:

$$\left(\frac{1}{2}g\right)t^2 + (-v_{0y})t + (y - y_0) = At^2 + Bt + C = 0$$

con $A = g/2$, $B = -v_{0y}$ y $C = y - y_0$. Usando la fórmula cuadrática (apéndice B), vemos que la ecuación tiene *dos* soluciones:

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$
$$= \frac{-(-v_{0y}) \pm \sqrt{(-v_{0y})^2 - 4(g/2)(y - y_0)}}{2(g/2)}$$
$$t = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{{v_{0y}}^2 - 2g(y - y_0)}}{g}$$

Sustituyendo los valores $y_0 = 0$, $v_{0y} = +15.0$ m/s, $g = 9.80$ m/s^2 y $y = -5.00$ m, obtenemos

$$t = \frac{(15.0\text{ m/s}) \pm \sqrt{(15.0\text{ m/s})^2 - 2(9.80\text{ m/s}^2)(-5.00\text{ m} - 0)}}{9.80\text{ m/s}^2}$$

$t = +3.36$ s o $t = -0.30$ s

Para decidir cuál de éstas es la respuesta correcta, la pregunta clave es: "¿Son lógicas estas respuestas?" La segunda, $t = -0.30$ s, simplemente es absurda; ¡se refiere a un instante 0.30 s *antes* de soltar la pelota! Lo correcto es $t = +3.36$ s. La pelota está 5.00 m debajo del barandal 3.36 s *después* de abandonar la mano.

EVALUAR: ¿De dónde salió la "solución" errónea $t = -0.30$ s? Recuerde que partimos de la ecuación (2.12) con $a_y = -g$, es decir, $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$. Esta ecuación incorpora el supuesto de que la aceleración es constante para *todos* los valores de t, positivos, negativos o cero. Tal cual, esta ecuación nos diría que la pelota se ha estado moviendo hacia arriba en caída libre desde los albores del tiempo y pasó por la mano en $y = 0$ en el instante especial que decidimos llamar $t = 0$, y continuó su caída libre. Sin embargo, todo lo que esta ecuación describa como sucedido antes de $t = 0$ es ficción, ya que la pelota entró en caída libre sólo después de abandonar la mano en $t = 0$; la "solución" $t = -0.30$ s es parte de esta ficción.

Repita estos cálculos para determinar cuándo la pelota está 5.00 m *sobre* el origen ($y = +5.00$ m). Las respuestas son $t = +0.38$ s y $t = +2.68$ s; ambos son valores positivos de t y se refieren al movimiento real de la pelota una vez soltada. El primer instante es cuando la pelota pasa por $y = +5.00$ m de subida, y el segundo, cuando pasa por ahí de bajada. (Compare esto con la parte (b) del ejemplo 2.7.) Determine también los instantes en que $y = +15.0$ m. En este caso, ambas soluciones requieren obtener la raíz cuadrada de un número negativo, así que *no hay* soluciones reales. Esto es lógico; en la parte (c) del ejemplo 2.7 vimos que la altura máxima de la pelota es $y = +11.5$ m, así que nunca llega a $y = +15.0$ m. Aunque una ecuación cuadrática como la (2.12) siempre tiene dos soluciones, a veces una o ambas no tienen sentido físico.

Evalúe su comprensión

Si lanza una pelota hacia arriba con cierta velocidad, cae libremente y alcanza una altura máxima h. ¿Qué altura máxima alcanza la pelota si se le lanza con una velocidad inicial dos veces mayor?

*2.6 | Velocidad y posición por integración

2.25 La posición y velocidad de un avión que cruza el Atlántico se obtienen integrando su aceleración respecto al tiempo.

Esta sección opcional es para estudiantes que ya aprendieron algo de cálculo integral. En la sección 2.4 analizamos el caso especial de movimiento rectilíneo con aceleración constante. Si a_x no es constante, como es común, no podemos aplicar las ecuaciones que deducimos en esa sección. Pero aun si a_x varía con el tiempo, podemos usar la relación $v_x = dx/dt$ para obtener la velocidad en función del tiempo si x es una función conocida de t, y podemos usar $a_x = dv_x/dt$ para obtener la aceleración a_x en función del tiempo si v_x es una función conocida de t.

En muchas situaciones físicas, sin embargo, no conocemos la posición y la velocidad en función del tiempo, pero sí la aceleración. ¿Cómo obtenemos la posición y la velocidad a partir de la función de aceleración $a_x(t)$? Este problema surge al volar un avión de Norteamérica a Europa (Fig. 2.25). La tripulación del avión debe conocer su posición precisa en todo momento, porque el espacio aéreo sobre el Atlántico norte está muy congestionado. Sin embargo, un avión sobre el océano suele estar fuera del alcance de los radiofaros terrestres y del radar de los controladores de tráfico aéreo. Para determinar su posición, los aviones cuentan con un sistema de navegación inercial (INS) que mide la aceleración del avión. Esto se hace de forma análoga o como sentimos cambios en la aceleración de un auto en el que viajamos, aun con los ojos cerrados. (En el capítulo 4 veremos cómo el cuerpo detecta la aceleración.) Dada esta información y la posición inicial del avión (digamos, una puerta dada en el aeropuerto Kennedy) y la velocidad inicial (cero cuando está estacionado en esa puerta), el INS calcula y muestra la velocidad y posición actuales del avión en todo momento durante el vuelo. Nuestro objetivo en el resto de esta sección es mostrar cómo se efectúan estos cálculos en el caso más sencillo de movimiento rectilíneo con aceleración variable en el tiempo. La figura 2.26 muestra un ejemplo cotidiano de movimiento rectilíneo con aceleración variable.

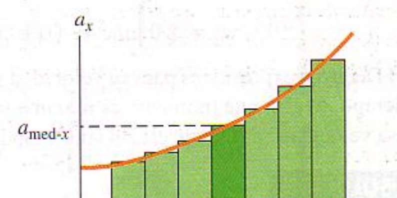
2.26 Cuando pisamos el pedal del acelerador de un auto, la aceleración resultante *no* es constante; cuanto mayor sea la rapidez del auto, más lentamente adquirirá rapidez adicional. Un auto ordinario tarda el doble en acelerar de 50 km/h a 100 km/h que en acelerar de 0 a 50 km/h.

Primero consideraremos un enfoque gráfico. La figura 2.27 es una gráfica a_x-t para un cuerpo cuya aceleración aumenta con el tiempo. Podemos dividir el intervalo entre los tiempos t_1 y t_2 en muchos intervalos más pequeños, llamando Δt a uno representativo. Sea $a_{\text{med-}x}$ la aceleración media durante Δt. Por la ecuación (2.4), el cambio de velocidad Δv_x durante Δt es

$$\Delta v_x = a_{\text{med-}x}\,\Delta t$$

Gráficamente, Δv_x es igual al área de la tira sombreada con altura $a_{\text{med-}x}$ y anchura Δt, es decir, el área bajo la curva entre los lados derecho e izquierdo de Δt. El cambio total de velocidad en cualquier intervalo (digamos, t_1 a t_2) es la suma de los cambios Δv_x en los subintervalos, y se representa gráficamente con el área *total* bajo la curva a_x-t entre t_1 y t_2. (En la sección 2.4 demostramos que esto se cumplía para el caso especial en que a es constante.)

En el límite donde los Δt se hacen muy pequeños y numerosos, el valor de $a_{\text{med-}x}$ para el intervalo de cualquier t a $t + \Delta t$ se acerca a la aceleración instantánea a_x en el instante t. En este límite, el área bajo la curva a_x-t es la *integral* de a_x (que en general es una función de t) de t_1 a t_2. Si v_{1x} es la velocidad del cuerpo en t_1 y v_{2x} es la velocidad en t_2,



2.27 El área bajo una curva a_x-t entre los tiempos t_1 y t_2 es igual al cambio de velocidad, $v_{2x} - v_{1x}$ que se da en ese lapso.

$$v_{2x} - v_{1x} = \int_{v_{1x}}^{v_{2x}} dv_x = \int_{t_1}^{t_2} a_x\,dt \tag{2.15}$$

El cambio en v_x es la integral de la aceleración a_x respecto al tiempo.

Podemos seguir exactamente el mismo procedimiento con la curva de velocidad contra tiempo, donde v_x es en general una función de t. Si x_1 es la posición de un cuerpo en t_1, y x_2 es su posición en t_2, por la ecuación (2.2) el desplazamiento Δx en un intervalo Δt pequeño es $v_{\text{med-}x}\Delta t$, *donde* $v_{\text{med-}x}$ es la velocidad media durante Δt. El desplazamiento total $x_2 - x_1$ durante $t_2 - t_1$ está dado por

$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt \tag{2.16}$$

El cambio en la posición x —o sea, el desplazamiento— es la integral en el tiempo de la velocidad v_x. Gráficamente, el desplazamiento entre t_1 y t_2 es el área bajo la curva v_x-t entre esos dos instantes. (Éste es el resultado que obtuvimos en la sección 2.4 para el caso en que v_x está dado por la ecuación (2.8).)

Si $t_1 = 0$ y t_2 es cualquier instante posterior t, y si x_0 y v_{0x} son la posición y la velocidad en $t = 0$, respectivamente, podemos reescribir las ecuaciones (2.15) y (2.16) así:

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x\,dt \qquad (2.17)$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\,dt \qquad (2.18)$$

Aquí, x y v_x son la posición y la velocidad en el instante t. Si conocemos la aceleración a_x en función del tiempo y la velocidad inicial v_{0x}, podremos usar la ecuación (2.17) para obtener v_x en cualquier instante; es decir, podemos obtener v_x en función de t. Una vez conocida esta función, y dada la posición inicial x_0, podemos usar la ecuación (2.18) para calcular x en cualquier instante.

Ejemplo 2.9 Movimiento con aceleración cambiante

Sara conduce su Mustang 1965 por una autopista recta. En el instante $t = 0$, cuando Sara avanza a 10 m/s en la dirección $+x$, pasa un letrero que está en $x = 50$ m. Su aceleración es una función del tiempo:

$$a_x = 2.0\ \text{m/s}^2 - (0.10\ \text{m/s}^3)t$$

a) Deduzca expresiones para su velocidad y posición en función del tiempo. b) ¿En qué momento es máxima su velocidad? c) ¿Cuál es esa velocidad? d) Dónde está el auto cuando alcanza esa velocidad?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La aceleración es función del tiempo, así que no podemos usar las fórmulas para aceleración constante de la sección 2.4. Debemos usar las ecuaciones (2.17) y (2.18) para obtener la velocidad y la posición, respectivamente, en función del tiempo. Una vez que tengamos esas funciones, podremos contestar diversas preguntas acerca del movimiento.

EJECUTAR: a) En $t = 0$, la posición de Sara es $x_0 = 50$ m y su velocidad es $v_{0x} = 10$ m/s. Puesto que se nos da la aceleración a_x en función del tiempo, primero usamos la ecuación (2.17) para obtener la velocidad v_x en función del tiempo t. La integral de t^n es $\int t^n dt = \frac{1}{n+1}t^{n+1}$ con $n \neq -1$, así que

$$v_x = 10\ \text{m/s} + \int_0^t [2.0\ \text{m/s}^2 - (0.10\ \text{m/s}^3)t]dt$$

$$= 10\ \text{m/s} + (2.0\ \text{m/s}^2)t - \frac{1}{2}(0.10\ \text{m/s}^3)t^2$$

Luego usamos la ecuación (2.18) para obtener x en función de t:

$$x = 50\ \text{m} + \int_0^t \left[10\ \text{m/s} + (2.0\ \text{m/s}^2)t - \frac{1}{2}(0.10\ \text{m/s}^3)t^2\right]dt$$

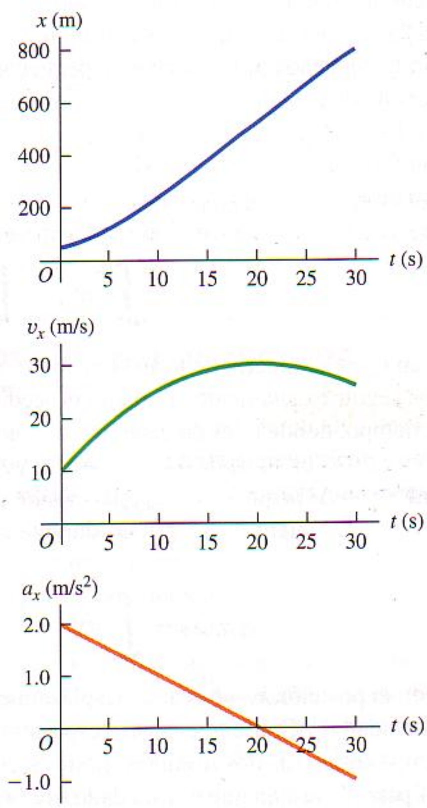
$$= 50\ \text{m} + (10\ \text{m/s})t + \frac{1}{2}(2.0\ \text{m/s}^2)t^2 - \frac{1}{6}(0.10\ \text{m/s}^3)t^3$$

La figura 2.28 muestra las gráficas de x, v_x y a_x en función del tiempo. Observe que, para cualquier t, la pendiente de la curva x-t es igual al valor de v_x, y la pendiente de la curva v_x-t es igual al valor de a_x.

b) El valor máximo de v_x se da cuando v_x deja de aumentar y comienza a disminuir. En este instante, $dv_x/dt = a_x = 0$. Igualando a 0 la expresión de la aceleración,

$$0 = 2.0\ \text{m/s}^2 - (0.10\ \text{m/s}^3)t$$

$$t = \frac{2.0\ \text{m/s}^2}{0.10\ \text{m/s}^3} = 20\ \text{s}$$



2.28 Posición, velocidad y aceleración del auto del ejemplo 2.9 como funciones del tiempo. ¿Puede demostrar que, de continuar el movimiento, el auto parará en $t = 44.5$ s?

c) Obtenemos la velocidad máxima sustituyendo $t = 20$ s (cuando v es máxima) en la ecuación general de velocidad:

$$v_{\text{máx-}x} = 10 \text{ m/s} + (2.0 \text{ m/s}^2)(20 \text{ s}) - \frac{1}{2}(0.10 \text{ m/s}^3)(20 \text{ s})^2$$
$$= 30 \text{ m/s}$$

d) El valor máximo de v_x se da en $t = 20$ s. Obtenemos la posición del auto (el valor de x) en ese instante sustituyendo $t = 20$ s en la expresión general de x:

$$x = 50 \text{ m} + (10 \text{ m/s})(20 \text{ s}) + \frac{1}{2}(2.0 \text{ m/s}^2)(20 \text{ s})^2$$
$$- \frac{1}{6}(0.10 \text{ m/s}^3)(20 \text{ s})^3$$
$$= 517 \text{ m}$$

EVALUAR: La figura 2.28 nos ayuda a interpretar los resultados. La curva inferior de esa figura muestra que a_x es positiva entre $t = 0$ y $t = 20$ s y negativa después, y es 0 en $t = 20$ s, cuando v_x es máxima (punto alto en la curva de en medio). El auto acelera hasta $t = 20$ s (porque v_x y a_x tienen el mismo signo) y frena después de $t = 20$ s (porque tienen signos opuestos).

Puesto que v_x es máxima en $t = 20$ s, la gráfica x-t (la de arriba en la Fig. 2.28) tiene su pendiente positiva máxima ahí. Observe que la curva es cóncava hacia arriba entre $t = 0$ y $t = 20$ s, cuando a_x es positiva, y es cóncava hacia abajo después de $t = 20$ s, cuando a_x es negativa.

Ejemplo 2.10 Fórmulas de aceleración constante por integración

Use las ecuaciones (2.17) y (2.18) para obtener v_x y x en función del tiempo para el caso de a_x constante. Compare los resultados con las fórmulas de aceleración constante $v_x = v_{0x} + a_x t$ (ecuación 2.8) y $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ (ecuación 2.12) que deducimos en la sección 2.4 sin usar integración.

SOLUCIÓN

EJECUTAR: Por la ecuación (2.17), la velocidad está dada por

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x\,dt = v_{0x} + a_x \int_0^t dt = v_{0x} + a_x t$$

Pudimos sacar a_x de la integral porque es constante. El resultado es idéntico a la ecuación (2.8), como debe ser. Si sustitiuimos esta expresión para v_x en la ecuación (2.18), obtendremos

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\,dt = x_0 + \int_0^t (v_{0x} + a_x t)\,dt$$

dado que v_{0x} y a_x son constantes, pueden sacarse de la integral:

$$x = x_0 + v_{0x}\int_0^t dt + a_x \int_0^t t\,dt = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

EVALUAR: Este resultado es igual a la ecuación (2.12). Nuestras expresiones para v_x y x, ecuaciones (2.17) y (2.18), que deducimos para manejar casos en que la aceleración depende del tiempo, pueden servirnos también cuando la aceleración es constante.

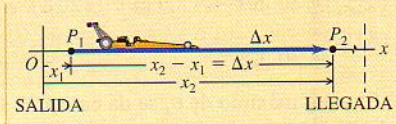
Evalúe su comprensión

Si la aceleración a_x está aumentando con el tiempo, ¿la gráfica v_x-t será una línea recta, una curva cóncava hacia arriba o una curva cóncava hacia abajo?

RESUMEN

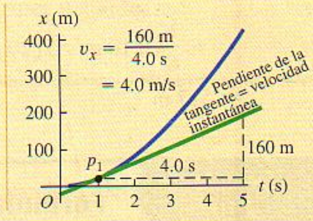
Cuando una partícula se mueve en línea recta, describimos su posición respecto al origen O mediante una coordenada como x. La velocidad media de la partícula, $v_{\text{med-}x}$, durante un intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ es igual a su desplazamiento $\Delta x = x_2 - x_1$ dividido entre Δt. (Véase ejemplo 2.1.)

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.2)$$



La velocidad instantánea v_x en cualquier instante t es igual a la velocidad media en el intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$ en el límite cuando Δt se acerca a cero. De forma equivalente, v_x es la derivada de la función de posición respecto al tiempo. (Véase ejemplo 2.1.)

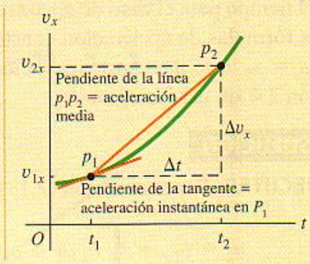
$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2.3)$$



La aceleración media $a_{\text{med-}x}$ durante un intervalo Δt es igual al cambio de velocidad $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ durante ese lapso dividido entre Δt. La aceleración instantánea a_x es el límite de $a_{\text{med-}x}$ cuando Δt se aproxima a cero, o la derivada de v_x respecto a t. (Véanse ejemplos 2.2 y 2.3.)

$$a_{\text{med-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad (2.4)$$

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad (2.5)$$



Cuando la aceleración es constante, cuatro ecuaciones relacionan la posición x y la velocidad v_x en cualquier instante t con la posición inicial x_0, la velocidad inicial v_{0x} (ambas en $t = 0$) y la aceleración a_x. (Véanse ejemplos 2.4 y 2.5.)

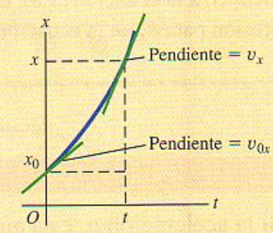
sólo aceleración constante:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad (2.8)$$

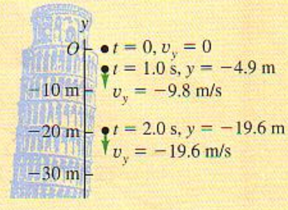
$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.12)$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \quad (2.13)$$

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right)t \quad (2.14)$$



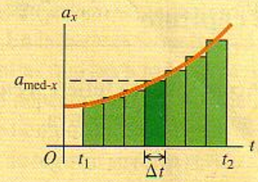
La caída libre es un caso del movimiento con aceleración constante. La magnitud de la aceleración debida a la gravedad es una cantidad positiva g. La aceleración de un cuerpo en caída libre siempre es hacia abajo. (Véanse ejemplos 2.6 a 2.8.)



Cuando la aceleración no es constante, sino una función conocida del tiempo, podemos obtener la velocidad y la posición en función del tiempo integrando la función de la aceleración. (Véanse ejemplos 2.9 y 2.10.)

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x \, dt \quad (2.17)$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x \, dt \quad (2.18)$$



Términos clave

aceleración debida a la gravedad, 59
aceleración instantánea, 49
aceleración media, 48
caída libre, 58
derivada, 44
diagrama de movimiento, 47
gráfica a_x-t, 53
gráfica v_x-t, 50
gráfica x-t, 43
partícula, 41
rapidez, 44
velocidad instantánea, 44
velocidad media, 41

Notas del lector

Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

Sí. Aceleración se refiere a *cualquier* cambio de velocidad, ya sea que aumente o disminuya.

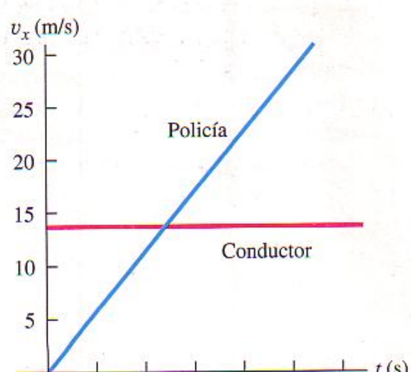
Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

Sección 2.1 Tanto el camión como el auto tienen el mismo desplazamiento total Δx (del punto A al punto B) durante el mismo intervalo de tiempo Δt. Por tanto, tienen la misma velocidad media $v_{\text{med-}x} = \Delta x/\Delta t$. Los detalles de lo que sucede durante el intervalo de tiempo no importan.

Sección 2.2 La velocidad es positiva cuando la pendiente de la gráfica x-t es positiva (punto P), negativa cuando la pendiente es negativa (punto R) y cero cuando la pendiente es cero (puntos Q y S). La rapidez es máxima en los tiempos en los que la pendiente de la gráfica x-t es más empinada (positiva o negativa), lo cual sucede en el punto R.

Sección 2.3 La aceleración es positiva cuando la curva x-t es cóncava hacia arriba, como en el punto S, y negativa cuando la curva es cóncava hacia abajo, como en el punto Q. La aceleración es cero cuando la gráfica x-t es una línea recta, como en los puntos P y R. En P, $v_x > 0$ y $a_x = 0$ (la rapidez no está cambiando); en Q, $v_x > 0$ y $a_x < 0$ (la rapidez está disminuyendo); en R, $v_x < 0$ y $a_x = 0$ (la rapidez no está cambiando); y en S, $v_x < 0$ y $a_x > 0$ (la rapidez está disminuyendo).

Sección 2.4 El conductor y el policía tienen la misma velocidad en $t = 5.0$ s.



Sección 2.5 Use la ecuación (2.13) sustituyendo x por y y $a_y = g$; $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$. La altura inicial es $y_0 = 0$ y la velocidad a la altura máxima $y = h$ es $v_y = 0$, así que $0 = v_{0y}^2 - 2gh$ y $h = v_{0y}^2/2g$. Si la velocidad inicial aumenta en un factor de 2, la altura máxima aumentará en un factor de $2^2 = 4$ y la pelota alcanzará la altura $4h$.

Sección 2.6 La aceleración a_x es igual a la pendiente de la gráfica v_x-t. Si a_x está aumentando, la pendiente de la gráfica v_x-t también aumenta y la curva es cóncava hacia arriba.

Preguntas para análisis

P2.1 ¿El velocímetro de un automóvil mide rapidez o velocidad? Explique.

P2.2 En un intervalo de tiempo dado, un auto acelera de 15 m/s a 20 m/s mientras un camión acelera de 36 m/s a 40 m/s. ¿Cuál vehículo tiene mayor aceleración media? Explique.

P2.3 ¿Un objeto con aceleración constante puede invertir la dirección en la que se mueve? Explique.

P2.4 ¿En qué condiciones la velocidad media es igual a la velocidad instantánea?

P2.5 En un tiempo dado, ¿el desplazamiento total de una partícula es igual al producto de la velocidad media y el intervalo de tiempo, aun si la velocidad no es constante? Explique.

P2.6 ¿En qué condiciones la magnitud de la velocidad media es igual a la rapidez media?

P2.7 Cuando un Dodge Viper está en el negocio "Lavamóvil", un BMW Z3 está en las calles Olmo y Central. Luego, cuando el Dodge llega a Olmo y Central, el BMW llega a "Lavamóvil". ¿Qué relación hay entre las velocidades medias de los autos entre esos instantes?

P2.8 Un conductor en el estado de Massachusetts fue citado a la corte por exceso de velocidad. La prueba contra el conductor era que una mujer policía observó al auto del conductor junto a un segundo auto, en un momento en el que la mujer policía ya había determinado que el segundo auto excedía el límite de velocidad. El conductor alegó que: "el otro auto me estaba rebasando, yo no iba a exceso de velocidad". El juez dictaminó contra él porque, según dijo, "si los autos estaban juntos, ambos iban a exceso de velocidad". Si usted fuera el abogado del conductor, ¿cómo defendería su caso?

P2.9 ¿Podemos tener desplazamiento 0 y velocidad media distinta de 0? ¿velocidad distinta de 0? Ilustre sus respuestas en una gráfica x-t.

P2.10 ¿Podemos tener aceleración 0 y velocidad distinta de 0? Explique, usando una gráfica v_x-t.

P2.11 ¿Podemos tener velocidad cero y aceleración media distinta de cero? ¿Velocidad cero y aceleración distinta de cero? Explique, usando una gráfica v_x-t y dé un ejemplo de dicho movimiento.

P2.12 Un automóvil viaja al oeste; ¿puede tener una velocidad hacia el oeste y simultáneamente una aceleración hacia el este? ¿En qué circunstancias?

P2.13 El camión del juez en la figura 2.2 está en $x_1 = 277$ m en $t_1 = 16.0$ s, y en $x_2 = 19$ m en $t_2 = 25.0$ s. a) Dibuje *dos* posibles gráficas x-t distintas para el movimiento del camión. b) ¿La velocidad media $v_{\text{med-}x}$ en el intervalo de t_1 a t_2 puede tener el mismo valor en ambas gráficas? ¿Por qué?

P2.14 Con aceleración constante, la velocidad media de una partícula es la mitad de la suma de sus velocidades inicial y final. ¿Se cumple esto si la aceleración *no* es constante? Explique.

P2.15 Usted lanza una pelota verticalmente hasta una altura máxima mucho mayor que su estatura. ¿Es la magnitud de la aceleración mayor mientras se lanza o después de que se suelta? Explique.

P2.16 Demuestre lo que sigue. i) En tanto puedan despreciarse los efectos del aire, si se lanza algo verticalmente hacia arriba tendrá la misma rapidez cuando regrese al punto de lanzamiento que cuando se soltó. ii) El tiempo de vuelo será el doble del tiempo de subida.

P2.17 En el ejemplo 2.7, sustituir $y = -18.4$ m en la ecuación (2.13) nos da $v_y = \pm 24.2$ m/s. La raíz negativa es la velocidad en t = 4.00 s. Explique el significado de la raíz positiva.

P2.18 Si se conocen la posición y velocidad iniciales de un vehículo y se registra la aceleración en cada instante, ¿puede calcularse la posición después de cierto tiempo con estos datos? Si se puede, explique cómo.

P2.19 Usted y un amigo se están asomando por la orilla de la azotea de un edificio alto. En el mismo instante en que usted lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial v_0, su amigo lanza una canica verticalmente hacia abajo con la misma rapidez inicial v_0. Suponga que se puede despreciar la resistencia del aire. ¿Cuál objeto llegará primero al suelo? Compare sus rapideces justo antes de tocar el suelo.

P2.20 Se deja caer una pelota desde el reposo en la azotea de un edificio de altura h. En el mismo instante, una segunda pelota se proyecta verticalmente hacia arriba desde el nivel de la calle, de modo que tenga velocidad cero cuando llegue al nivel de la azotea. Cuando las dos pelotas se cruzan, ¿cuál tiene mayor rapidez (o tienen las dos la misma rapidez)? Explique. ¿Dónde estarán las dos pelotas cuando se crucen: a una altura $h/2$ sobre la calle, más abajo de esa altura o arriba de esa altura? Explique.

Ejercicios

Sección 2.1 Desplazamiento, tiempo y velocidad media

2.1 Un cohete que lleva un satélite acelera verticalmente alejándose de la superficie terrestre. 1.15 s después del despegue, el cohete libra el tope de su plataforma, 63 m sobre el suelo; después de otros 4.75 s, está 1.00 km sobre el suelo. Calcule la magnitud de la velocidad media del cohete en a) la parte de 4.75 s de su vuelo; b) los primeros 5.90 s de su vuelo.

2.2 En un experimento, se sacó una pardela (un ave marina) de su nido, se le llevó a 5150 km de distancia y luego fue liberada. El ave regresó 13.5 días después de haberse liberado. Si el origen es el nido y extendemos el eje $+x$ al punto de liberación, ¿cuál fue la velocidad media del ave en m/s a) en el vuelo de regreso? b) ¿Desde que se tomó del nido hasta que regresó?

2.3 Viaje a casa. Suponga que normalmente conduce por la autopista que va de San Diego y Los Ángeles con una rapidez media de 105 km/h y el viaje le toma 2 h y 20 min. Sin embargo, un viernes en la tarde el tráfico le obliga a conducir la misma distancia con una rapidez media de sólo 70 km/h. ¿Cuánto tiempo más tardará el viaje?

2.4 De pilar a poste. Partiendo de un pilar, usted corre 200 m al este (la dirección $+x$) con rapidez media de 5.0 m/s, luego 280 m al oeste con rapidez media de 4.0 m/s hasta un poste. Calcule a) su rapidez media y b) su velocidad media; del pilar al poste.

2.5 Dos corredores parten simultáneamente del mismo punto de una pista circular de 200 m y corren en la misma dirección. Uno corre con una rapidez constante de 6.20 m/s, y el otro, con rapidez constante de 5.50 m/s. ¿Cuándo alcanzará el más rápido al más lento (sacándole una vuelta) y qué distancia desde el punto de salida habrá cubierto cada uno?

2.6 Geología. Los sismos producen varios tipos de ondas de choque. Las más conocidas son las ondas P (*primarias* o de *presión*) y las ondas S (*secundarias* o de *corte*). En la corteza terrestre, las ondas P viajan a cerca de 6.5 km/s mientras que las S lo hacen a unos 3.5 km/s. Las rapideces reales varían dependiendo del tipo de material que atraviesan. La diferencia de tiempo entre la llegada de estos dos tipos de ondas en una estación de registro sísmico revela a los geólogos la distancia a la que se produjo el sismo. Si el retraso es de 33 s, ¿a qué distancia de la estación sísmica se produjo el sismo?

2.7 a) Su vieja Combi VW traquetea con una rapidez media de 8.0 m/s durante 60 s, luego entra en calor y corre otros 60 s con una rapidez media de 20.0 m/s. a) Calcule la rapidez media en los 120 s. b) Suponga que la rapidez de 8.0 m/s se mantuvo durante 240 m, seguida de la rapidez media de 20.0 m/s durante otros 240 m. Calcule la rapidez media en toda la distancia. c) ¿En cuál caso es la rapidez media de todo el movimiento el promedio de las dos rapideces?

2.8 Un Honda Civic viaja en línea recta en carretera. Su distancia x de un letrero de alto está dada en función de t por: $x(t) = \alpha t^2 - \beta t^3$, donde $\alpha = 1.50$ m/s^2 y $\beta = 0.0500$ m/s^3. Calcule la velocidad media del auto para los intervalos a) $t = 0$ a $t = 2.00$ s; b) $t = 0$ a $t = 4.00$ s; c) $t = 2.00$ s a $t = 4.00$ s.

Sección 2.2 Velocidad instantánea

2.9 Un auto está parado ante un semáforo. Después viaja en línea recta y su distancia respecto al semáforo está dada por $x(t) = bt^2 - ct^3$, donde $b = 2.40$ m/s^2 y $c = 0.120$ m/s^3. a) Calcule la velocidad media del auto entre $t = 0$ y t = 10.0 s. b) Calcule la velocidad instantánea en i) $t = 0$; ii) t = 5.0 s; iii) $t = 10.0$ s. c) ¿Cuánto tiempo después de arrancar vuelve a estar parado el auto?

2.10 Una profesora de física sale de su casa y camina hacia el campus. A los 5 min, comienza a llover y ella regresa a casa. Su distancia respecto a su casa en función del tiempo se muestra en la figura 2.29. ¿En cuál punto rotulado es su velocidad a) cero? b) constante y positiva? c) constante y negativa? d) de magnitud creciente? e) de magnitud decreciente?

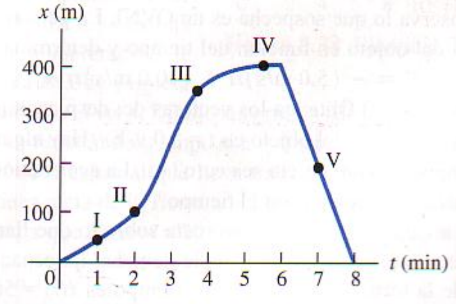


Figura 2.29 Ejercicio 2.10.

Sección 2.3 Aceleración media e instantánea

2.11 Un piloto de pruebas de Automotores Galaxia, S. A. está probando un nuevo modelo de auto con un velocímetro calibrado para indicar m/s en lugar de km/h. Se obtuvo la siguiente serie de lecturas durante una prueba efectuada en una carretera recta y larga:

Tiempo(s)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Rapidez (m/s)	0	0	2	6	10	16	19	22	22

a) Calcule la aceleración media en cada intervalo de 2 s. ¿Es constante la aceleración? ¿Es constante durante alguna parte de la prueba? b) Prepare una gráfica v_x-t con los datos, usando escalas de 1 cm = 1 s horizontalmente y 1 cm = 2 m/s verticalmente. Dibuje una curva suave que pase por los puntos. Mida la pendiente de la curva para obtener la aceleración instantánea en: $t = 9$ s, 13 s y 15 s.

2.12 La figura 2.30 muestra la velocidad de un auto solar en función del tiempo. El conductor acelera desde un letrero de alto, viaja 20 s con rapidez constante de 60 km/h y frena para detenerse 40 s después de partir del letrero. Calcule la aceleración media para estos intervalos: a) $t = 0$ a $t = 10$ s; b) $t = 30$ s a $t = 40$ s; c) $t = 10$ s a $t = 30$ s; d) $t = 0$ a $t = 40$ s.

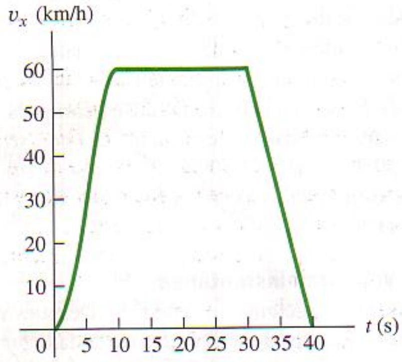


Figura 2.30 Ejercicios 2.12 y 2.13.

2.13 Refiérase al ejercicio 2.12 y a la figura 2.30. a) ¿En qué intervalo de tiempo tiene la aceleración instantánea a_x su valor más positivo? b) ¿Y el más negativo? c) Determine la aceleración instantánea en $t = 20$ s. y d) Determínela en $t = 35$ s. e) En un diagrama de movimiento (como el de las Figs. 2.13b o 2.14b), muestre la posición, velocidad y aceleración del auto en los instantes: $t = 5$ s, $t = 15$ s, $t = 25$ s y $t = 35$ s.

2.14 Una persona que se asoma por la ventana de un edificio alto de oficinas observa lo que sospecha es un OVNI. La persona registra la posición del objeto en función del tiempo y determina que está dada por $\vec{r}(t) = -(5.0\ \text{m/s})t\hat{\imath} + (10.0\ \text{m/s})t\hat{\jmath} + [(7.0\ \text{m/s})t - (3.0\ \text{m/s}^2)t^2]\hat{k}$. a) Obtenga los vectores de: desplazamiento, velocidad y aceleración del objeto en $t = 5.0$ s. b) ¿Hay algún tiempo en que la velocidad del objeto sea cero? c) ¿La aceleración del objeto es constante o cambia con el tiempo?

2.15 Una tortuga camina en línea recta sobre lo que llamaremos eje x con la dirección positiva hacia la derecha. La ecuación de la posición de la tortuga en función del tiempo es $x(t) = 50.0\ \text{cm} + (2.00\ \text{cm/s})t - (0.0625\ \text{cm/s}^2)t^2$. a) Determine la velocidad inicial, posición inicial y aceleración inicial de la tortuga. b) ¿En qué instante t la tortuga tiene velocidad cero? c) ¿Cuánto tiempo después de ponerse en marcha regresa la tortuga al punto de partida? d) ¿En qué instantes t la tortuga está a una distancia de 10.0 m de su punto de partida? ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tiene la tortuga en cada uno de esos instantes? e) Dibuje las gráficas: x-t, v_x-t y a_x-t para el intervalo de $t = 0$ a $t = 40.0$ s.

2.16 Una astronauta salió de la Estación Espacial Internacional para probar un nuevo vehículo espacial. Su compañero mide los siguientes cambios de velocidad, cada uno en un intervalo de 10 s. Indique la magnitud, el signo y la dirección de la aceleración media en cada intervalo. Suponga que la dirección positiva es a la derecha. a) Al principio del intervalo, la astronauta se mueve a la derecha sobre el eje x a 15.0 m/s, y al final se mueve a la derecha a 5.0 m/s. b) Al principio se mueve a la izquierda a 5.0 m/s y al final lo hace a la izquierda a 15.0 m/s. c) Al principio se mueve a la derecha a 15.0 m/s y al final lo hace a la izquierda a 15.0 m/s.

2.17 Aceleración de un automóvil. Con base en su experiencia al viajar en automóvil, estime la magnitud de la aceleración media de un auto cuando frena desde una rapidez de autopista hasta un alto total. b) Explique por qué esa aceleración media podría considerarse positiva o bien negativa.

2.18 La velocidad de un auto en función del tiempo está dada por $v_x(t) = \alpha + \beta t^2$, donde $\alpha = 3.00$ m/s y $\beta = 0.100\ \text{m/s}^3$. a) Calcule la aceleración media entre $t = 0$ y $t = 5.00$ s. b) Calcule la aceleración instantánea en: i) $t = 0$, ii) $t = 5.00$ s. c) Dibuje las gráficas: v_x-t y a_x-t exactas para el movimiento del auto entre $t = 0$ y $t = 5.00$ s.

2.19 La figura 2.31 es una gráfica de la coordenada de una araña que camina sobre el eje x. a) Grafique su velocidad y aceleración en función del tiempo. b) En un diagrama de movimiento (como el de las Figs. 2.13b y 2.14b), muestre la posición, velocidad y aceleración de la araña en los tiempos: $t = 2.5$s, $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 30$ s y $t = 37.5$ s.

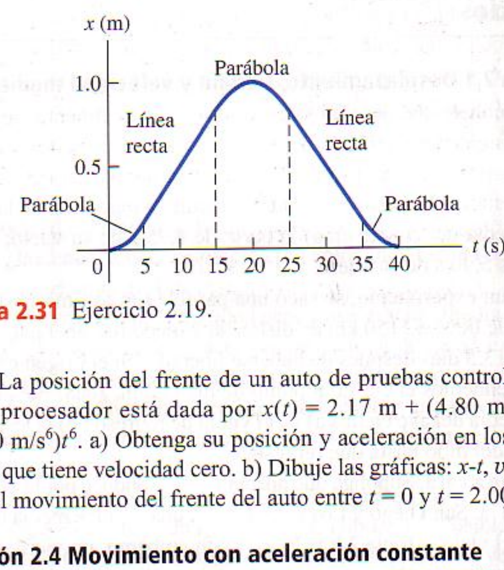


Figura 2.31 Ejercicio 2.19.

2.20 La posición del frente de un auto de pruebas controlado por microprocesador está dada por $x(t) = 2.17\ \text{m} + (4.80\ \text{m/s}^2)t^2 - (0.100\ \text{m/s}^6)t^6$. a) Obtenga su posición y aceleración en los instantes en que tiene velocidad cero. b) Dibuje las gráficas: x-t, v_x-t y a_x-t para el movimiento del frente del auto entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s.

Sección 2.4 Movimiento con aceleración constante

2.21 Un antílope con aceleración constante cubre la distancia de 70.0 m entre dos puntos en 7.00 s. Su rapidez al pasar el segundo punto es 15.0 m/s. a) ¿Qué rapidez tenía en el primero? b) ¿Qué aceleración tiene?

2.22 La catapulta del portaaviones *USS Abraham Lincoln* acelera un *jet* de combate F/A-18 Hornet desde el reposo a una rapidez de despegue de 173 mi/h en una distancia de 307 ft. Suponga aceleración constante. a) Calcule la aceleración del avión en m/s^2. b) Calcule el tiempo necesario para acelerar el avión hasta la rapidez de despegue.

2.23 Bolsas de aire de automóvil. El cuerpo humano puede sobrevivir a un incidente de trauma de aceleración negativa (parada repentina) si la magnitud de la aclereración es menor que 250 m/s^2 (cerca de 25 g). Si usted sufre un accidente automovilístico con velocidad inicial de 105 km/h y es detenido por una bolsa de aire que se infla desde el tablero, ¿en qué distancia debe ser detenido para sobrevivir?

2.24 Un avión recorre 280 m en una pista antes de despegar; parte del reposo, se mueve con aceleración constante y está en el aire en 8.00 s. ¿Qué rapidez en m/s tiene cuando despega?

2.25 Ingreso a la autopista. Un auto está parado en una rampa de acceso a una autopista esperando un hueco en el tráfico. El conductor ve un hueco entre una vagoneta y un camión de 18 ruedas y acelera con aceleración constante para entrar en la autopista. El auto parte del reposo, se mueve en línea recta y tiene una rapidez de 20 m/s al llegar al final de la rampa de 120 m de largo. a) ¿Qué aceleración tiene el auto? b) ¿Cuánto tarda el auto en salir de la rampa? c) El tráfico de la autopista se mueve con rapidez constante de 20 m/s. ¿Qué distancia recorre el tráfico mientras el auto se mueve por la rampa?

2.26 Las figuras 2.15, 2.16, 2.17 y 2.18 se dibujaron para movimiento con aceleración constante y valores positivos de x_0, v_{0x} y a_x. Vuelva a dibujar las figuras para estos casos: a) $x_0 < 0$, $v_{0x} < 0$, $a_x < 0$; b) $x_0 > 0$, $v_{0x} < 0$, $a_x > 0$; c) $x_0 > 0$, $v_{0x} > 0$, $a_x < 0$.

2.27 Según datos de pruebas efectuadas en 1994, un automóvil Ford Aspire recorre 0.250 millas en 19.9 s, partiendo del reposo. El mismo auto, viajando a 60.0 mph y frenando en pavimento seco, se detiene en 146 pies. Suponga una aceleración constante en cada parte del movimiento, pero no necesariamente la misma aceleración al arrancar que al frenar. a) Calcule la aceleración del auto al arrancar y al frenar. b) Si su aceleración es constante, ¿con qué rapidez (en mph) deberá estar viajando el auto después de acelerar durante 0.250 millas? La rapidez real medida es de 70.0 mph; ¿qué le dice esto acerca del movimiento? c) ¿Cuánto tarda este auto en detenerse cuando viaja a 60.0 mph?

2.28 Un gato camina en línea recta en lo que llamaremos eje x con la dirección positiva a la derecha. Usted, que es un físico observador, efectúa mediciones del movimiento del gato y construye una gráfica de la velocidad del felino en función del tiempo (Fig. 2.32). a) Determine la velocidad del gato en: $t = 4.0$ s y en $t = 7.0$ s. b) ¿Qué aceleración tiene el gato en $t = 3.0$ s? ¿En $t = 6.0$ s? ¿En $t = 7.0$ s? c) ¿Qué distancia cubre el gato durante los primeros 4.5 s? ¿Entre $t = 0$ y $t = 7.5$ s? d) Dibuje gráficas claras de: la aceleración

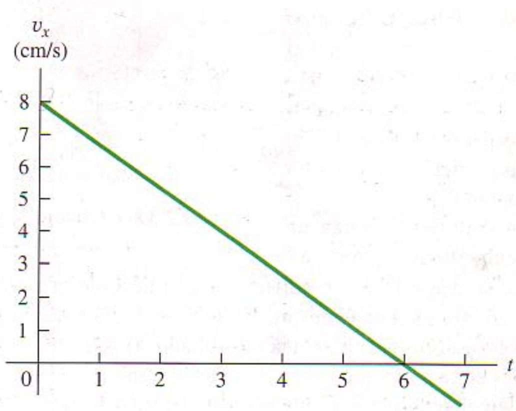


Figura 2.32 Ejercicio 2.28.

y la posición del gato en función del tiempo, suponiendo que el gato partió del origen.

2.29 En $t = 0$, un Corvette viaja por un tramo largo y recto de carretera en Arizona con rapidez constante de 30 m/s. El movimiento dura 20 s. Luego la conductora, preocupada porque va a llegar tarde, acelera a una tasa constante durante 5 s para alcanzar una rapidez de 40 m/s. El auto viaja con esta rapidez 10 s, pero la conductora ve un policía en motocicleta parado detrás de un cacto grande y frena con aceleración constante de magnitud 4.0 m/s^2 hasta que la rapidez del auto baja otra vez al límite legal de 30 m/s. Ella mantiene esta rapidez y saluda al policía cuando lo pasa 5 s después. a) Dibuje las gráficas: a_x-t, v_x-t y x-t exactas para el movimiento del auto desde $t = 0$ hasta que pasa al policía. b) En un diagrama de movimiento (como los de las Figs. 2.13b o 2.14b), muestre: la posición, velocidad y aceleración del auto.

2.30 En $t = 0$, un auto está detenido ante un semáforo. Al encenderse la luz verde, el auto acelera a razón constante hasta alcanzar una rapidez de 20 m/s 8 s después de arrancar. El auto continúa con rapidez constante durante 60 m. Luego, el conductor ve un semáforo con luz roja en el siguiente cruce y frena a razón constante. El auto para ante el semáforo, a 180 m de donde estaba en $t = 0$. a) Dibuje las gráficas: x-t, v_x-t y a_x-t exactas para el movimiento del auto. b) En un diagrama de movimiento (como los de las Figs. 2.13b y 2.14b), muestre: la posición, velocidad y aceleración del auto.

2.31 La gráfica de la figura 2.33 muestra la velocidad de un policía en motocicleta en función del tiempo. a) Calcule la aceleración instantánea en: $t = 3$ s, $t = 7$ s y $t = 11$ s. ¿Qué distancia cubre el policía los primeros 5 s? ¿Los primeros 9 s? ¿Los primeros 13 s?

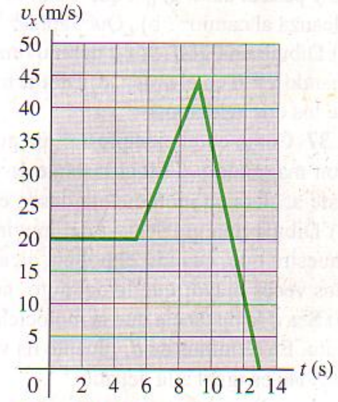


Figura 2.33 Ejercicio 2.31.

2.32 La figura 2.34 es una gráfica de la aceleración de una locomotora de juguete que se mueve en el eje x. Dibuje las gráficas de su velocidad y coordenada x en función del tiempo si $x = 0$ y $v_x = 0$ cuando $t = 0$.

2.33 Una nave espacial que lleva trabajadores a la Base Lunar I, viaja en línea recta de la Tierra a la Luna, una distancia de 384, 000 km. Suponga que acelera a 20.0 m/s^2 los primeros 15.0 min, viaja

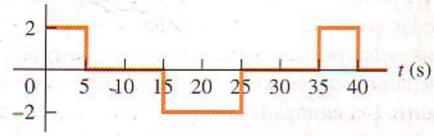


Figura 2.34 Ejercicio 2.32.

con rapidez constante hasta los últimos 15.0 min, cuando acelera a −20.0 m/s^2, parando justo al llegar a la Luna. a) ¿Qué rapidez máxima se alcanzó? b) ¿Qué fracción de la distancia total se cubrió con rapidez constante? c) ¿Cuánto tardó el viaje?

2.34 Un tren subterráneo en reposo parte de una estación y acelera a 1.60 m/s^2 durante 14.0 s, viaja con rapidez constante 70.0 s y frena a 3.50 m/s^2 hasta parar en la siguiente estación. Calcule la distancia *total* cubierta.

2.35 Dos autos, A y B, se mueven por el eje x. La figura 2.35 grafica sus posiciones contra el tiempo. a) En diagramas de movimiento (como la Fig. 2.13b o la 2.14b), muestre la posición, velocidad y aceleración de cada auto en: t = 0 s, t = 1 s y t = 3 s. b) ¿En qué instante(s), si acaso, tienen A y B la misma posición? c) Trace una curva de velocidad contra tiempo para A y para B. d) ¿En qué instante(s), si acaso, tienen A y B la misma velocidad? e) ¿En qué instante(s), si acaso, el auto A rebasa a B? f) ¿En qué instante(s) si acaso, el auto B pasa a A?

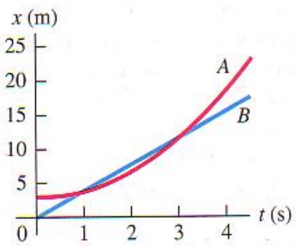


Figura 2.35 Ejercicio 2.35.

2.36 En el instante en que un semáforo se pone en luz verde, un auto que esperaba en el cruce arranca con aceleración constante de 3.20 m/s^2. En el mismo instante, un camión que viaja con rapidez constante de 20.0 m/s alcanza y pasa al auto. a) ¿A qué distancia de su punto de partida el auto alcanza al camión? b) ¿Qué rapidez tiene el auto en ese momento? c) Dibuje una gráfica x-t del movimiento de los dos vehículos, tomando $x = 0$ en el cruce. d) Dibuje una gráfica v_x-t del movimiento de los dos vehículos.

2.37 Como en el ejemplo 2.5, un auto viaja a velocidad constante con magnitud v_C. En el instante en que el auto pasa a un policía, éste acelera su motocicleta desde el reposo con aceleración a_{Mx}. a) Dibuje una gráfica x-t del movimiento de ambos objetos. Demuestre que, cuando el policía alcanza al auto, tiene una rapidez dos veces mayor que la del auto, no importando el valor de a_{Mx}. b) Sea d la distancia que la motocicleta recorre antes de alcanzar al auto. En términos de d, ¿cuánto ha viajado el policía cuando su velocidad es igual a la del auto?

Sección 2.5 Cuerpos en caída libre

2.38 Gotas de lluvia. Si pueden descontarse los efectos del aire sobre las gotas de lluvia, podemos tratarlas como objetos en caída libre. a) Las nubes de lluvia suelen estar a unos pocos cientos de metros sobre el suelo. Estime la rapidez (en m/s, km/h y mi/h) con que las gotas llegarían el suelo si fueran objetos en caída libre. b) Estime (con base en sus observaciones personales) la velocidad real con que las gotas de lluvia chocan con el suelo. c) Con base en sus respuestas a las partes (a) y (b), ¿es justificable ignorar los efectos del aire sobre las gotas de lluvia? Explique.

2.39 a) Si una pulga puede saltar 0.440 m hacia arriba, ¿qué rapidez tiene al separarse del suelo? ¿Cuánto tiempo está en el aire?

2.40 Alunizaje. Un alunizador está descendiendo hacia la Base Lunar I (Fig. 2.36) frenado por el empuje del motor de descenso. El motor se apaga cuando el alunizador está 5.0 m sobre la superficie y tiene una velocidad hacia abajo de 0.8 m/s. Con el motor apagado, el vehículo está en caída libre. ¿Qué rapidez tiene justo antes de tocar la superficie? La aceleración debida a la gravedad lunar es de 1.6 m/s^2.

2.41 Una prueba sencilla de tiempo de reacción. Se sostiene un metro verticalmente de modo que su extremo inferior esté entre el pulgar y el índice de la mano del sujeto de la prueba. Al ver que sueltan el metro, el sujeto lo detiene juntando esos dos dedos. Se puede calcular el tiempo de reacción con base en la distancia que el metro cayó antes de que se le detuviera, leída de la escala en el punto en que el sujeto lo tomó. a) Deduzca una relación para el tiempo de reacción en términos de esta distancia d. b) Si la distancia es 17.6 cm, ¿cuál es el tiempo de reacción?

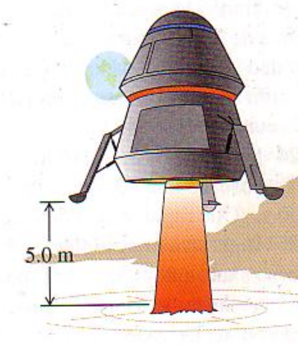


Figura 2.36 Ejercicio 2.40.

2.42 Se deja caer un tabique (rapidez inicial cero) desde la azotea de un edificio. El tabique choca con el piso en 2.50 s. Se puede despreciar la resistencia del aire, así que el tabique está en caída libre. a) ¿Qué altura (en m) tiene el edificio? b) ¿Qué magnitud tiene la velocidad del tabique justo antes de llegar al suelo? c) Dibuje las gráficas: a_y-t, v_y-t y y-t para el movimiento.

2.43 Enojada, Verónica lanza su anillo de compromiso verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio, a 12.0 m del suelo, con rapidez inicial de 5.00 m/s. Se puede despreciar la resistencia del aire. Para el movimiento desde la mano hasta el suelo, ¿qué magnitud y dirección tienen a) la velocidad media del anillo? b) ¿su aceleración media? c) ¿Cuántos segundos después de ser lanzado toca el suelo el anillo? d) ¿Qué rapidez tiene el anillo justo antes de tocar el suelo? e) Dibuje las gráficas: a_y-t, v_y-t y y-t para el movimiento.

2.44 El tripulante de un globo aerostático, que sube verticalmente con velocidad constante de magnitud 5.00 m/s, suelta un saco de arena cuando el globo está 40.0 m sobre el suelo (Fig. 2.37). El saco está en caída libre. a) Calcule la posición y velocidad del saco a 0.250 s y 1.00 s después de soltarse. b) ¿Cuánto tardará el saco en chocar con el suelo? c) ¿Con qué rapidez chocará? d) ¿Qué altura máxima alcanza el saco sobre el suelo? e) Dibuje las gráficas: a_y-t, v_y-t y y-t para el movimiento.

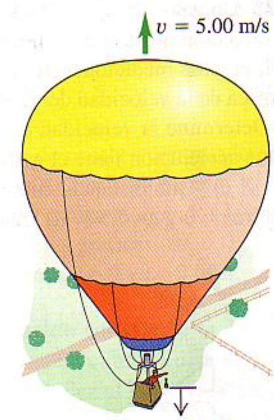


Figura 2.37 Ejercicio 2.44.

2.45 Un estudiante lanza un globo lleno con agua, verticalmente hacia abajo desde un edificio, imprimiéndole una rapidez inicial de 6.00 m/s. Puede despreciarse la resistencia del aire, así que el globo está en caída libre una vez soltado. a) ¿Qué rapidez tiene después de caer durante 2.00 s? b) ¿Qué distancia cae en ese lapso? c) ¿Qué magnitud tiene su velocidad después de caer 10.0 m? d) Dibuje las gráficas: a_y-t, v_y-t y y-t para el movimiento.

2.46 Se lanza un huevo casi verticalmente hacia arriba desde un punto cerca de la cornisa de un edificio alto; al bajar, apenas libra la cornisa y pasa por un punto 50.0 m bajo su punto de partida 5.00 s después de abandonar la mano que lo lanzó. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿Qué rapidez inicial tiene el huevo? b) ¿Qué altura alcanza sobre el punto de lanzamiento? c) ¿Qué magnitud tiene su velocidad en el punto más alto? d) ¿Qué magnitud y dirección tiene su aceleración en el punto más alto? e) Dibuje las gráficas: a_y-t, v_y-t y y-t para el movimiento.

2.47 El trineo cohete *Sonic Wind No. 2*, utilizado para investigar los efectos fisiológicos de aceleraciones elevadas, corre sobre una vía recta horizontal de 1070 m. Desde el reposo, puede alcanzar una rapidez de 224 m/s en 0.900 s. a) Calcule la aceleración en m/s^2, suponiendo que es constante. b) ¿Cuál es la razón de esta aceleración a la de un cuerpo en caída libre (g)? c) ¿Qué distancia se cubre en 0.900 s? d) En una revista se aseguró que, al final de cierta prueba, la rapidez del trineo descendió de 283 m/s a cero en 1.40 s y que en ese tiempo la magnitud de la aceleración fue mayor que 40g. ¿Son congruentes estas cifras?

2.48 Un peñasco es expulsado verticalmente hacia arriba por un volcán, con una rapidez inicial de 40.0 m/s. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿En qué instante después de ser expulsado el peñasco está subiendo a 20.0 m/s? b) ¿En qué instante está bajando a 20.0 m/s? c) ¿Cuándo es cero el desplazamiento respecto a la posición inicial? d) ¿Cuándo es cero la velocidad del peñasco? e) ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración cuando el peñasco está: i) subiendo? ii) ¿bajando? iii) ¿en el punto más alto? f) Dibuje las gráficas: a_y-t, v_y-t y y-t para el movimiento.

2.49 Suponga que g fuera sólo 0.98 m/s^2 en lugar de 9.8 m/s^2, pero que no cambiaran las velocidades iniciales con que podemos saltar hacia arriba o lanzar pelotas. a) Calcule la altura hasta la que podría saltar verticalmente estando parado si puede saltar 0.75 m con g = 9.8 m/s^2. b) ¿Qué tan alto podría lanzar una bola si la lanza 18 m hacia arriba con g = 9.8 m/s^2? c) Calcule la altura máxima de una ventana desde la que saltaría a la acera si con g = 9.8 m/s^2 se atreve a saltar desde 2.0 m, la altura normal de una ventana de primer piso.

*Sección 2.6 Velocidad y posición por integración

***2.50** La aceleración de un camión está dada por $a_x(t) = \alpha t$, donde α = 1.2 m/s^3. a) Si la rapidez del camión en t = 1.0 s es 5.0 m/s, ¿cuál será en t = 2.0 s? b) Si la posición del camión en t = 1.0 s es 6.0 m, ¿cuál será en t = 2.0 s? c) Dibuje las gráficas: a_x-t, v_x-t y x-t para el movimiento.

***2.51** La aceleración de una motocicleta está dada por $a_x(t) = At - Bt^2$, con A = 1.50 m/s^3 y B = 0.120 m/s^4. La moto está en reposo en el origen en t = 0. a) Obtenga su posición y velocidad en función de t. b) Calcule la velocidad máxima que alcanza.

***2.52** **Salto volador de la pulga**. Una película tomada a alta velocidad (3500 cuadros por segundo) de una pulga saltarina de 210 μg produjo los datos que se usaron para dibujar la gráfica de la figura 2.38. (Véase "The Flying Leap of the Flea", por M. Rothschild, Y. Schlein, K. Parker, C. Neville y S. Sternberg en el *Scientific American* de noviembre de 1973.) La pulga tenía una longitud aproximada de 2 mm y saltó con un ángulo de despegue casi vertical. Use la

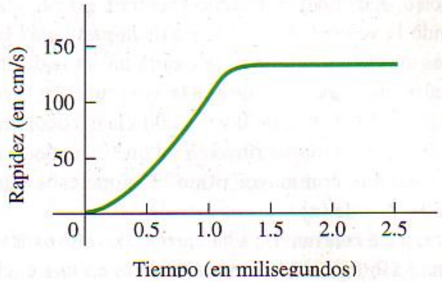


Figura 2.38 Ejercicio 2.52.

gráfica para contestar estas preguntas. a) ¿La aceleración de la pulga es cero en algún momento? Si lo es, ¿cuándo? Justifique su respuesta. b) Calcule la altura máxima que la pulga alcanzó en los primeros 2.5 ms. c) Determine la aceleración de la pulga a los: 0.5 ms, 1.0 ms y 1.5 ms. d) Calcule la altura de la pulga a los: 0.5 ms, 1.0 ms y 1.5 ms.

***2.53** La gráfica de la figura 2.39 describe, en función del tiempo, la aceleración de una piedra que baja rodando por una ladera, habiendo partido del reposo. a) Determine el cambio de velocidad de la piedra entre t = 2.5 s y t = 7.5 s. b) Dibuje una gráfica de la velocidad de la piedra en función del tiempo.

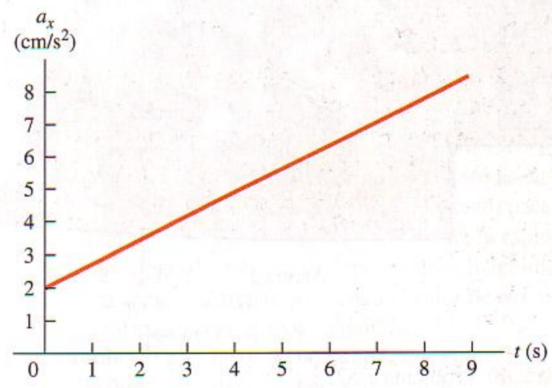


Figura 2.39 Ejercicio 2.53.

Problemas

2.54 En un paseo de 20 mi en bicicleta, usted recorre las primeras 10 mi con rapidez media de 8 mi/h. ¿Qué rapidez media en las otras 10 mi requerirá para que la rapidez media total en las 20 mi sea: a) 4 mi/h? b) ¿12 mi/h? c) Dada la rapidez media indicada para las primeras 10 millas, ¿le sería posible alcanzar una rapidez media de 16 mi/h para todo el paseo? Explique

2.55 La posición de una partícula entre t = 0 y t = 2.00 s está dada por $x(t) = (3.00\ \text{m/s}^3)t^3 - (10.0\ \text{m/s}^2)t^2 + (9.00\ \text{m/s})t$. a) Dibuje las gráficas: x-t, v_x-t y a_x-t para la partícula. b) ¿En qué instante(s) entre t = 0 y t = 2.00 s está instantáneamente en reposo la partícula? ¿Coincide el resultado numérico con la gráfica v_x-t de la parte (a)? c) En cada instante calculado en (b), ¿es la aceleración positiva o negativa? Demuestre que las respuestas pueden deducirse de $a_x(t)$ y de la gráfica v_x-t. d) En qué instante(s) entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s no está cambiando la velocidad instantánea de la partícula? Ubique este punto en las curvas v_x-t y a_x-t de (a). e) ¿Cuál es la distancia máxima de la partícula respecto al origen ($x = 0$) entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s? f) ¿En qué instante(s) entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s la partícula está *aumentando de rapidez* con mayor ritmo? ¿En qué instante(s) de ese lapso se está *frenando* con mayor ritmo? Ubique esos puntos en las gráficas v_x-t y a_x-t de (a).

2.56 Carrera de relevos. En una carrera de relevos, cada competidora corre 25.0 m con un huevo sostenido en una cuchara, se da vuelta y regresa al punto de partida. Elsa corre los primeros 25.0 m en 20.0 s. Al regresar se siente más confiada y tarda sólo 15.0 s. ¿Qué magnitud tiene su velocidad media en a) los primeros 25.0 m? b) ¿el regreso? c) ¿Cuál es su velocidad media para el viaje redondo? d) ¿Y su rapidez media?

2.57 Dan entra en la carretera interestatal I-80 en Seward, Nebraska, y viaja al oeste en línea recta con rapidez media de 88 km/h. Después de 76 km, llega a la salida de Aurora (Fig. 2.40). Percatándose de que llegó demasiado lejos, se da vuelta y conduce 34 km al este hasta la salida de York con rapidez media de 72 km/h. Para el viaje total de Seward a la salida de York, determine a) su rapidez media. b) La magnitud de su velocidad media.

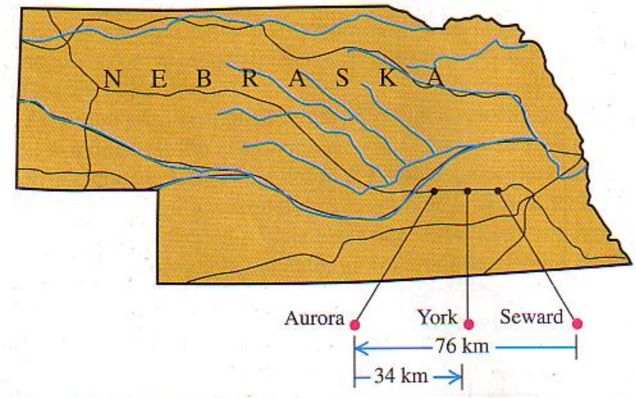


Figura 2.40 Problema 2.57.

2.58 Tráfico de autopista. Según el *Scientific American* (mayo de 1990), las autopistas actuales pueden controlar 2400 vehículos por carril por hora en tráfico uniforme a 96 km/h. Si hay más vehículos, el flujo de tráfico se hace "turbulento" (intermitente). a) Si un vehículo tiene longitud media de 4.6 m, ¿qué espacio medio hay entre vehículos con la densidad de tráfico mencionada? b) Los sistemas de control para evitar automáticamente los choques, que operan rebotando ondas de radar o sonar en los vehículos circundantes, acelerando o frenando el vehículo según sea necesario, podrían reducir mucho el espacio entre vehículos. Si el espacio medio es de 9.2 m (el largo de dos autos), cuántos vehículos por hora podrían circular a 96 km/h en un carril?

2.59 Un velocista de clase mundial acelera a su rapidez máxima en 4.0 s y mantiene esa rapidez durante el resto de la carrera de 100 m, llegando a la meta con un tiempo de 9.1 s. a) ¿Qué aceleración media tiene durante los primeros 4.0 s? b) ¿Qué aceleración media tiene durante los últimos 5.1 s? c) ¿Qué aceleración media tiene durante toda la carrera? d) Explique por qué su respuesta a la parte (c) no es el promedio de las respuestas a las partes (a) y (b).

2.60 Un trineo parte del reposo en la cima de una colina y baja con aceleración constante. En un instante posterior, el trineo está a 14.4 m de la cima; 2.00 s después está a 25.6 m de la cima, 2.00 s después está a 40.0 m de la cima y 2.00 s después está a 57.6 m. a) ¿Qué magnitud tiene la velocidad media del trineo en cada intervalo de 2.00 s después de pasar los 14.4 m? b) ¿Qué aceleración tiene el trineo? c) ¿Qué rapidez tiene el trineo al pasar los 14.4 m? d) ¿Cuánto tiempo tomó al trineo llegar de la cima a los 14.4 m? e) ¿Qué distancia cubrió el trineo durante el primer segundo después de pasar los 14.4 m?

2.61 Frenar o acelerar. Un auto de 3.5 m viaja con rapidez constante de 20 m/s y se acerca a un cruce de 20 m de ancho (Fig. 2.41). El semáforo se pone en amarillo cuando el frente del auto está a 50 m del cruce. Si el conductor pisa el freno, el auto se frenará a $-3.8\ \mathrm{m/s^2}$; si pisa el acelerador, el auto acelerará a $2.3\ \mathrm{m/s^2}$. El semáforo estará en amarillo 3.0 s. Suponga que el conductor reacciona instantáneamente. ¿Deberá éste, para no estar en el cruce con el semáforo en rojo, pisar el freno o el acelerador?

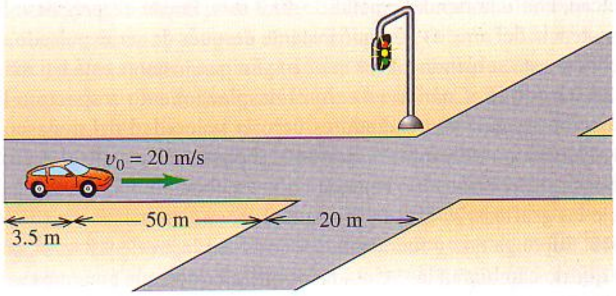


Figura 2.41 Problema 2.61.

2.62 En el aire o en el vacío, la luz viaja con rapidez constante de 3.0×10^8 m/s. Para contestar algunas de las preguntas podría ser necesario consultar datos astronómicos en el apéndice F. a) Se define un año luz como la distancia que la luz recorre en un año. Utilice esta información para averiguar cuántos metros hay en un año luz. b) ¿Cuántos metros recorre la luz en un nanosegundo? c) Cuando hay una erupción solar, cuánto tiempo pasa antes de que pueda verse en la Tierra? d) Rebotando rayos láser en un reflector colocado en la Luna por los astronautas del Apolo, los astrónomos pueden efectuar mediciones muy exactas de la distancia Tierra-Luna. ¿Cuánto tiempo después de emitido tarda el rayo láser (que es un haz de luz) en regresar a la Tierra? e) La sonda Voyager, que pasó por Neptuno en agosto de 1989, estaba a cerca de 3000 millones de millas de la Tierra en ese momento, y envió a la Tierra fotografías y otra información mediante ondas de radio, que viajan con la rapidez de la luz. ¿Cuánto tardaron esas ondas en llegar del Voyager a la Tierra?

2.63 Utilice la información del apéndice F para contestar estas preguntas. a) ¿Qué rapidez tienen las islas Galápagos, situadas en el ecuador, debido a la rotación de la Tierra sobre su eje? b) ¿Qué rapidez tiene la Tierra debido a su traslación en torno al Sol? c) Si la luz siguiera la curvatura de la Tierra (cosa que no hace), ¿cuántas veces daría la vuelta al ecuador un rayo de luz en un segundo?

2.64 En una carrera de 350 m, el corredor A parte del reposo y acelera a 1.6 m/s^2 durante los primeros 30 m y luego corre con rapidez constante. El corredor B parte del reposo y acelera a 2.0 m/s^2 durante los primeros 30 m y después corre con rapidez constante. El corredor A comienza a correr tan pronto como inicia la competencia, pero B se duerme primero unos momentos para descansar. ¿Cuánto puede durar como máximo la siesta de B para que no pierda la carrera?

2.65 Una pelota parte del reposo y baja rodando una loma con aceleración uniforme, recorriendo 150 m durante los segundos 5.0 s de su movimiento. ¿Qué distancia cubrió durante los primeros 5.0 s?

2.66 Choque. El maquinista de un tren de pasajeros que viaja a 25.0 m/s avista un tren de carga cuyo cabús está 200 m más adelante en la misma vía (Fig. 2.42). El tren de carga viaja en la misma dirección a 15.0 m/s. El maquinista del tren de pasajeros aplica de inmediato los frenos, causando una aceleración constante de -0.100 m/s^2, mientras el tren de carga sigue con rapidez constante. Sea $x = 0$ el punto donde está el frente del tren de pasajeros cuando el maquinista aplica los frenos. a) ¿Presenciarán las vacas una colisión? b) Si es así, ¿Dónde ocurrirá? c) Dibuje en una sola gráfica las posiciones del frente del tren de pasajeros y del cabús del tren de carga en función del tiempo.

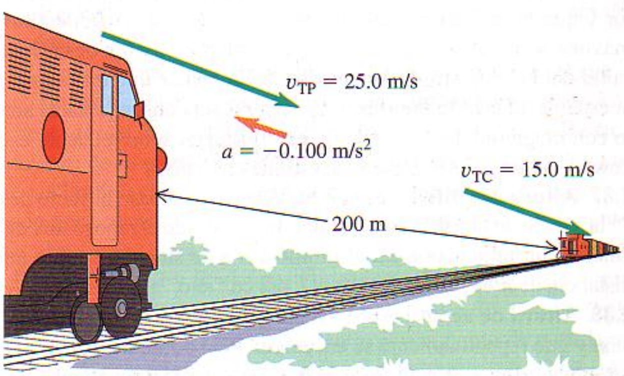


Figura 2.42 Problema 2.66.

2.67 Las cucarachas grandes pueden correr a 1.50 m/s en tramos cortos. Suponga que enciende la luz en un hotel barato y ve una cucaracha alejándose en línea recta a 1.50 m/s (constante) mientras usted se acerca a ella a 0.80 m/s. Si inicialmente usted estaba 0.90 m detrás, ¿qué aceleración constante mínima necesitará para alcanzar al bicho cuando éste ha recorrido 1.20 m, justo antes de escapar bajo un mueble?

2.68 Considere la situación descrita en el ejemplo 2.5, que no es realista porque si el policía mantiene una aceleración constante rebasará al auto. En una persecución real, el policía aceleraría a una rapidez mayor que la del auto y luego frenaría para tener la velocidad del auto al alcanzarlo. Suponga que el policía del ejemplo acelera del reposo con $a_x = 2.5$ m/s^2 hasta que su rapidez es de 20 m/s y luego frena a ritmo constante hasta alcanzar el auto en $x = 360$ m, viajando con la rapidez del auto, 15 m/s. a) ¿En qué instante el policía alcanza al auto? b) ¿En qué instante el policía deja de acelerar y comienza a frenar? ¿A qué distancia está entonces del letrero? ¿Y del auto? c) Calcule la aceleración del policía mientras está frenando. d) Grafique x contra t para los dos vehículos. e) Grafique v_x contra t para los dos vehículos.

2.69 Un auto y un camión parten del reposo en el mismo instante, con el auto cierta distancia detrás del camión. El camión tiene aceleración constante de 2.10 m/s^2, y el auto, 3.40 m/s^2. El auto alcanza al camión cuando éste ha recorrido 40.0 m. a) ¿Cuánto tarda el auto en alcanzar al camión? b) ¿Qué tan atrás del camión estaba el auto inicialmente? c) ¿Qué rapidez tienen los vehículos cuando están juntos? d) Dibuje en una sola gráfica la posición de cada vehículo en función del tiempo. Sea $x = 0$ la posición inicial del camión.

2.70 Dos pilotos de exhibición conducen uno hacia el otro. En $t = 0$ la distancia entre los autos es D, el auto 1 está parado y el 2 se mueve a la izquierda con rapidez v_0. El auto 1 comienza a moverse en $t = 0$ con aceleración constante a_x. El auto 2 sigue a velocidad constante. a) ¿En qué instante chocarán los autos? b) Calcule la rapidez del auto 1 justo antes de chocar. c) Dibuje las gráficas x-t y v_x-t para los 2 autos, usando los mismos ejes.

2.71 Viajando a 20 m/s en su Mustang, Juan sale de una curva a un tramo recto de un camino rural y ve un camión fertilizador cargado que bloquea totalmente el camino 37 m más adelante. Asustado, avanza 0.8 s a velocidad constante antes de reaccionar y pisar el freno causando una aceleración constante que le permite parar justo antes donde está el camión. Con los mismos tiempos de reacción y aceleración, si hubiera salido de la curva a 25 m/s en vez de 20 m/s, a) ¿cuál habría sido su rapidez al chocar con el camión? b) ¿Cuánto tiempo habría tenido para recordar toda su vida desde que avistó el camión hasta chocar con éste?

2.72 Una patrulla viaja en línea recta con rapidez v_P constante. Un camión que viaja en la misma dirección con rapidez $\frac{3}{2}\,v_p$ rebasa a la patrulla. La conductora del camión ve que va a exceso de velocidad y de inmediato comienza a frenar a ritmo constante hasta parar. Por suerte, la patrulla (que sigue a la misma velocidad) pasa al camión sin multar a la conductora. a) Demuestre que la rapidez del camión cuando la patrulla lo pasa *no* depende de la magnitud de la aceleración del camión al frenar, y obtenga el valor de esa rapidez. b) Dibuje la gráfica x-t para ambos vehículos.

2.73 Rebasado. El conductor de un auto desea rebasar un camión que viaja a 20.0 m/s (constante). Inicialmente, el auto también viaja a 20.0 m/s y su parachoques delantero (defensa) está 24.0 m atrás del parachoques trasero (defensa) del camión. El auto adquiere una aceleración constante de 0.600 m/s^2 y regresa al carril del camión cuando su parachoques trasero (defensa) está 26.0 m adelante del frente del camión. El auto tiene una longitud de 4.5 m, y el camión, 21.0 m. a) ¿Cuánto tiempo necesita el auto para rebasar? b) ¿Qué distancia recorre el auto en ese tiempo? c) ¿Qué rapidez final tiene el auto?

***2.74** La velocidad medida de un objeto es $v_x(t) = \alpha - \beta t^2$, donde $\alpha = 4.00$ m/s y $\beta = 2.00$ m/s^3. En $t = 0$, el objeto está en $x = 0$. a) Calcule la posición y aceleración del objeto en función de t. b) ¿Qué desplazamiento *positivo* máximo tiene el objeto respecto al origen?

***2.75** La aceleración de una partícula está dada por $a_x(t) = -2.00$ m/s^2 + (3.00 m/s^3)t. a) Encuentre la velocidad inicial v_{0x} tal que la partícula tenga la misma coordenada x en $t = 4.00$ s que en $t = 0$. b) ¿Cuál será su velocidad en $t = 4.00$ s?

2.76 Caída de huevo. Imagine que está en la azotea del edificio de física, 46.0 m sobre el suelo (Fig. 2.43). Su profesor, que tiene una estatura de 1.80 m, camina junto al edificio a 1.20 m/s (constante). Si desea dejar caer un huevo sobre su cabeza, dónde deberá estar el profesor cuando usted suelte el huevo? Suponga caída libre.

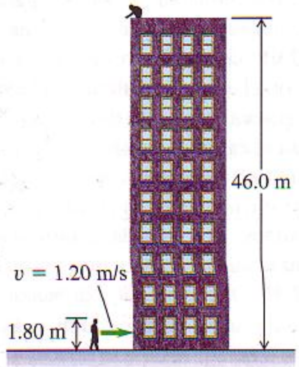


Figura 2.43 Problema 2.76.

2.77 Un estudiante de física con demasiado tiempo libre suelta una sandía desde una azotea y oye que la sandía se estrella 2.50 s después. ¿Qué altura tiene el edificio? La rapidez del sonido es de 340 m/s. No tome en cuenta la resistencia del aire.

2.78 Elevadores. Estime la rapidez máxima y la magnitud de aceleración de un elevador. Necesitará usar sus observaciones de aproximadamente cuánto tarda el elevador en ir de un piso a otro, la distancia vertical aproximada de un piso al siguiente y la distancia a lo largo de la cual un elevador acelera hasta su rapidez máxima o frena para detenerse.

2.79 Quienes visitan cierto parque de diversiones ven cómo unos clavadistas se lanzan de una plataforma a 21.3 m por arriba de un estanque. Según el anunciador, los clavadistas entran en el agua con una rapidez de 25 m/s. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿Es verdad lo que dice el anunciador? b) ¿Puede una clavadista saltar hacia arriba desde la plataforma y, librando la tabla, entrar en el agua a 25.0 m/s? De ser así, ¿qué velocidad inicial requiere? ¿Se puede alcanzar físicamente esa velocidad?

2.80 Una maceta con flores cae del borde de una ventana y pasa frente a la ventana de abajo. Se puede despreciar la resistencia del aire. La maceta tarda 0.420 s en pasar por esta ventana, cuya altura es de 1.90 m. ¿A qué distancia debajo del punto desde el cual cayó la maceta está el borde superior de la ventana de abajo?

2.81 Se patea un balón verticalmente hacia arriba desde el suelo y una estudiante asomada a una ventana lo ve subir frente a ella a 5.00 m/s. La ventana está 12.0 m sobre el suelo. Se puede despreciar la resistencia del aire. a) ¿Hasta dónde sube la pelota? b) ¿Cuánto tarda en alcanzar esa altura?

2.82 Un modelo de cohete tiene aceleración ascendente constante de 40.0 m/s^2 con el motor trabajando. El cohete se dispara verticalmente y el motor trabaja 2.50 s antes de agotar el combustible, quedando el cohete en caída libre. El movimiento es sólo vertical. a) Dibuje las gráficas: a_y-t, v_y-t y y-t para el cohete. b) ¿Qué altura máxima alcanzará el cohete? c) ¿Qué rapidez tendrá el cohete justo antes de tocar el suelo? d) ¿El tiempo total de vuelo es el doble del tiempo que el cohete tarda en alcanzar la altura máxima? ¿Por qué sí o por qué no? (Véase la pregunta P2.16.)

2.83 Cuidado abajo. Sam avienta una bala de 16 lb directamente hacia arriba imprimiéndole una aceleración constante de 45.0 m/s^2 desde el reposo a lo largo de 64.0 cm, soltándola 2.20 m sobre el suelo. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿Qué rapidez tiene la bala cuando Sam la suelta? b) ¿Qué altura alcanza sobre el suelo? c) ¿Cuánto tiempo tiene Sam para quitarse de abajo antes de que la bala regrese a la altura de la cabeza, 1.83 m sobre el suelo?

2.84 Una profesora de física que está efectuando una demostración al aire libre, de repente cae desde el reposo en lo alto de un acantilado y simultáneamente grita "¡Auxilio!" Después de caer 3.0 s, escucha el eco de su grito proveniente del suelo del valle. La rapidez del sonido es de 340 m/s. a) ¿Qué altura tiene el acantilado? b) Si se desprecia la resistencia del aire, con qué rapidez se estará moviendo la profesora justo antes de chocar con el piso? (Su rapidez real será menor, debido a la resistencia del aire.)

2.85 Malabarismo. Un malabarista actúa en un recinto cuyo techo está 3.0 m arriba del nivel de las manos. Lanza una pelota hacia arriba de modo que apenas llega al techo. a) ¿Qué velocidad inicial tiene la pelota? b) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al techo? En el instante en que la primera pelota está en el techo, el malabarista lanza una segunda pelota hacia arriba con dos terceras partes de la velocidad inicial de la primera. c) ¿Cuánto tiempo después de lanzada la segunda pelota se cruzan las dos pelotas en el aire? d) ¿A qué altura sobre la mano del malabarista se cruzan las dos pelotas?

2.86 Un helicóptero que lleva al doctor Malvado despega con aceleración constante hacia arriba de 5.0 m/s^2. El agente secreto Austin Powers se trepa de un salto al helicóptero justo cuando éste despega. Los dos hombres forcejean durante 10.0 s, después de lo cual Powers apaga el motor y se lanza desde el helicóptero. Suponga que el helicóptero está en caída libre después de apagarse el motor y que la resistencia del aire es insignificante. a) ¿Qué altura máxima sobre el suelo alcanza el helicóptero? b) 7.0 s después de saltar del helicóptero, Powers enciende un cohete que trae sujeto a la espalda, el cual le imprime una aceleración constante hacia abajo con magnitud de 2.0 m/s^2. ¿A qué distancia sobre el suelo está Powers cuando el helicóptero se estrella en el piso?

2.87 Altura de edificio. El hombre Araña da un paso al vacío desde la azotea de un edificio y cae libremente desde el reposo una distancia h hasta la acera. En el último 1.0 s de su caída, cubre una distancia de $h/4$. Calcule la altura h del edificio.

2.88 Altura de acantilado. Imagine que está escalando una montaña y que repentinamente se encuentra en el borde de un acantilado, envuelto en niebla. Para determinar la altura del acantilado, deja caer un guijarro y 10.0 s después escucha el sonido que hace al golpear el suelo al pie del acantilado. a) Sin tomar en cuenta la resistencia del aire, ¿qué altura tiene el acantilado si la rapidez del sonido es de 330 m/s? b) Suponga que hizo caso omiso del tiempo que el sonido tarda en llegar a los oídos. ¿Habría sobreestimado o subestimado la altura del acantilado? Explique su razonamiento.

2.89 Lata que cae. Un pintor está parado en un andamio que sube con rapidez constante. Por descuido, empuja una lata de pintura, la cual cae del andamio cuando está 15.0 m sobre el suelo. Un observador usa su cronómetro para determinar que la lata tarda 3.25 s en llegar al suelo. No tome en cuenta la resistencia del aire. a) ¿Qué rapidez tiene la lata justo antes de llegar al suelo? b) Otro pintor está parado en una cornisa, una lata está a 4.00 m arriba de él cuando ésta se cae. Tiene reflejos felinos, y si la lata pasa frente a él, podrá atraparla. ¿Tiene oportunidad de hacerlo?

2.90 Decidido a probar la ley de la gravedad, un estudiante se deja caer ($v_0 = 0$) desde un rascacielos de 180 m, cronómetro en mano, e inicia una caída libre. Cinco segundos después, llega Supermán y se lanza de la azotea para salvarlo, con una rapidez inicial v_0 que imprimió a su cuerpo empujándose hacia abajo desde el borde de la azotea con sus piernas de acero. Después, cae con la misma aceleración que cualquier cuerpo en caída libre. a) ¿Qué valor deberá tener v_0 para que Supermán atrape al estudiante justo antes de llegar al suelo? b) Dibuje en una sola gráfica las posiciones de Supermán y del estudiante como funciones de t. La rapidez inicial de Supermán tiene el valor calculado en (a). c) Si la altura del edificio es menor que cierto valor, ni Supermán podrá salvar al estudiante. ¿Cuál es la altura mínima?

2.91 Otro estudiante decidido (véase el problema 2.90) se deja caer desde la Torre CN de Toronto, de 553 m, y cae libremente. Su velocidad inicial es cero. Rocketeer llega 5.00 segundos después y se lanza de la torre para salvarlo. Rocketeer se lanza con una velocidad hacia abajo de magnitud v_0. A fin de evitar lesiones, Rocketeer deberá atrapar al estudiante a una altura tal que puedan frenar y llegar al suelo con velocidad cero. La aceleración ascendente para lograrlo proviene del cohete de Rocketeer, el cual se enciende justo cuando atrapa al estudiante; antes, está en caída libre. Para no lastimar al estudiante, la magnitud de la aceleración de Rocketeer y el estudiante al bajar juntos no deberá ser mayor que 5 veces g. a) ¿Cuál es la altura mínima sobre el suelo a la que Rocketeer deberá atrapar al estudiante? b) ¿Qué rapidez inicial hacia abajo deberá tener Rocketeeer para atrapar al estudiante a la altura mínima obtenida en (a)? c) Dibuje las gráficas: v_y-t y a_y-t para el estudiante y para Rocketeer. En cada una, use un solo par de ejes para ambos cuerpos.

2.92 Se lanza una bola verticalmente hacia arriba desde el suelo con rapidez v_0. En el mismo instante, una segunda bola (en reposo) se deja caer de una altura H directamente encima del punto de lanzamiento de la primera. No hay resistencia del aire. a) ¿Cuándo chocan las bolas? b) Obtenga el valor de H en términos de v_0 y g de modo que, cuando choquen las bolas, la primera esté en su punto más alto.

2.93 Dos autos, A y B, viajan en línea recta. La distancia de A respecto al punto de partida está dada por $x_A(t) = \alpha t + \beta t^2$, con $\alpha = 2.60$ m/s y $\beta = 1.20$ m/s^2. La distancia entre B y el punto de partida es $x_B(t) = \gamma t^2 - \delta t^3$, con $\gamma = 2.80$ m/s^2 y $\delta = 0.20$ m/s^3. a) ¿Cuál auto se adelanta justo después de partir? b) ¿En qué instante(s) los dos autos están en el mismo punto? c) ¿En qué instante(s) la distancia entre A y B no está aumentando ni disminuyendo? d) ¿En qué instante(s) A y B tienen la misma aceleración?

2.94 Una manzana cae libremente de un árbol, estando originalmente en reposo a una altura H sobre un césped crecido cuyas hojas miden h. Cuando la manzana llega al césped, se frena con razón constante de modo que su rapidez es 0 al llegar al suelo. a) Obtenga la rapidez de la manzana justo antes de tocar el césped. b) Obtenga la aceleración de la manzana ya dentro del césped. c) Dibuje las gráficas: v_y-t y a_y-t para el movimiento de la manzana.

Problemas de desafío

2.95 Tomar el camión. Una estudiante corre a más no poder para alcanzar su camión, que está detenido en la parada, con una rapidez constante de 5.0 m/s. Cuando ella está a 40.0 m del camión, éste se pone en marcha con aceleración constante de 0.170 m/s^2. ¿Durante qué tiempo y qué distancia debe correr la estudiante a 5.0 m/s para alcanzar al camión? b) Cuando lo hace, ¿qué rapidez tiene el camión? c) Dibuje una gráfica x-t para la estudiante y el camión, donde $x = 0$ es la posición inicial de la estudiante. d) Las ecuaciones que usó en (a) para calcular t tienen una segunda solución, que corresponde a un instante posterior en que la estudiante y el camión están otra vez en el mismo lugar si continúan su movimiento. Explique el significado de esta otra solución. ¿Qué rapidez tiene el camión en ese punto? e) Si la rapidez de la estudiante fuera de 3.5 m/s, ¿alcanzaría al camión? f) ¿Qué rapidez *mínima* requiere la estudiante para apenas alcanzar al camión? ¿Durante qué tiempo y qué distancia deberá correr en tal caso?

2.96 En el salto vertical, un atleta se agazapa y salta hacia arriba tratando de alcanzar la mayor altura posible. Ni los campeones pasan mucho más de 1.00 s en el aire ("tiempo de suspensión"). Trate al atleta como partícula y sea $y_{\text{máx}}$ su altura máxima sobre el suelo. Para explicar por qué parece estar suspendido en el aire, calcule la razón del tiempo que está sobre $y_{\text{máx}}/2$ al tiempo que tarda en llegar del suelo a esa altura. Desprecie la resistencia del aire.

2.97 Se lanza una pelota hacia arriba desde el borde de una azotea. Una segunda pelota se deja caer desde la azotea 1.00 s después. Desprecie la resistencia del aire. a) Si la altura del edificio es 20.0 m, ¿qué velocidad inicial necesitará la primera bola para que las dos lleguen al suelo al mismo tiempo? Dibuje en una sola gráfica la posición de cada pelota en función del tiempo, a partir del instante en que se lanzó la primera. Considere la misma situación, pero sea la rapidez inicial v_0 de la primera pelota un dato y la altura h del edificio la incógnita. b) ¿Qué altura deberá tener el edificio para que las dos pelotas lleguen al suelo al mismo tiempo si v_0 es: i) 6.0 m/s? ii) ¿9.5 m/s? c) Si v_0 es mayor que cierto valor $v_{\text{máx}}$, no existe una h tal que ambas pelotas lleguen al piso simultáneamente. Obtenga $v_{\text{máx}}$. Este valor tiene una interpretación física sencilla. ¿Cuál es? d) Si v_0 es menor que cierto valor $v_{\text{mín}}$, no existe una h tal que ambas pelotas lleguen al piso al mismo tiempo. Obtenga $v_{\text{mín}}$. Este valor también tiene una interpretación física sencilla. ¿Cuál es?

2.98 Un excursionista despierto ve un peñasco caer desde un risco lejano y observa que tarda 1.30 s en caer el último tercio de la distancia. Puede despreciarse la resistencia del aire. a) ¿Qué altura (en m) tiene el risco? b) Si en (a) obtiene dos soluciones de una ecuación cuadrática y usa una para su respuesta, ¿qué representa la otra?