

## Apéndice A

# Revisión de Matemáticas

En este apéndice se revisarán algunos de los resultados básicos del álgebra, de la geometría, de la trigonometría y del cálculo diferencial e integral. En muchos casos, sólo se enunciarán los resultados sin demostrarlos. En la tabla A-1 se relacionan algunos símbolos matemáticos.

### Ecuaciones

Para facilitar la resolución de las ecuaciones matemáticas, pueden realizarse las operaciones siguientes:

1. A cada miembro de la ecuación puede sumársele o restársele la misma cantidad.
2. Cada miembro de la ecuación puede multiplicarse o dividirse por la misma cantidad.
3. Ambos miembros de la ecuación pueden elevarse a la misma potencia.

Es importante darse cuenta de que las reglas precedentes se aplican a cada *miembro* de la ecuación y no a cada *término* de la misma.

Tabla A-1 Símbolos matemáticos

$=$	es igual a
$\neq$	no es igual a
$\approx$	es aproximadamente igual a
$\sim$	es del orden de
$\propto$	es proporcional a
$>$	es mayor que
$\geq$	es mayor o igual que
$\gg$	es mucho mayor que
$<$	es menor que
$\leq$	es menor o igual que
$\ll$	es mucho menor que
$\Delta x$	variación o incremento de $x$
$ x $	valor absoluto de $x$
$n!$	$(n - 1)(n - 2) \dots 1$
$\Sigma$	suma
$\lim$	límite
$\Delta t \rightarrow 0$	$\Delta t$ tiende a cero
$\frac{dx}{dt}$	derivada de $x$ respecto a $t$
$\frac{\partial x}{\partial t}$	derivada parcial de $x$ respecto a $t$
$\int$	integral

**Ejemplo A-1**

Hallar el valor de  $x$  que satisface la siguiente ecuación:

$$(x - 3)^2 + 7 = 23$$

Primero restamos 7 de cada miembro de la ecuación para obtener  $(x - 3)^2 = 16$ . Extrayendo la raíz cuadrada de cada miembro, que es lo mismo que elevar cada miembro de la potencia  $\frac{1}{2}$ , se obtiene  $\pm (x - 3) = \pm 4$ . Hemos incluido el signo más-menos porque tanto  $(+4)^2 = 16$  como  $(-4)^2 = 16$ . No es necesario escribir  $\pm$  en ambos miembros porque todas las posibilidades de signos se incluyen en  $x - 3 = \pm 4$ . Podemos ahora obtener  $x$  sumando 3 a cada miembro. Existen dos soluciones:  $x = 4 + 3 = 7$  y  $x = -4 + 3 = -1$ . Pueden comprobarse estos valores sustituyéndolos en la ecuación original.

**Ejemplo A-2**

Hallar el valor de  $x$  que satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

Este tipo de ecuación se presenta tanto en óptica geométrica como en los análisis de los circuitos eléctricos. Aunque es fácil de resolver, suelen cometerse errores. La resolveremos restando en primer lugar  $\frac{1}{4}$  de cada miembro para obtener

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$$

Luego se multiplica cada miembro por  $12x$  para obtener  $x = 12$ . Obsérvese que esto último es equivalente a tomar el recíproco de cada miembro de la ecuación. Un error típico que se comete en este tipo de ecuación, es el de tomar el recíproco de cada término primeramente, obteniéndose así  $x + 4 = 3$ . Esta operación no es correcta; cambia los valores relativos de cada miembro de la ecuación y conduce a resultados incorrectos.

**Proporción directa e inversa**

Las relaciones existentes que afectan tanto a las proporciones directas como a las proporciones inversas son tan importantes en física que merecen una consideración especial. Es frecuente que puedan evitarse ciertas manipulaciones algebraicas sólo mediante el conocimiento de estas relaciones. Supóngase, por ejemplo, que después de trabajar durante 5 días con un jornal se ha ganado 40 000 ptas. ¿Cuánto se ganaría con el mismo jornal si se trabajase 8 días? En este problema el dinero ganado es *directamente proporcional* al tiempo trabajado. Puede escribirse una ecuación que relacione el dinero ganado  $M$  con el tiempo  $t$  trabajado utilizando una constante de proporcionalidad  $R$ :

$$M = Rt$$

En este caso la constante de proporcionalidad es el jornal diario. Puede expresarse  $R$  en pesetas por día. Como 40 000 ptas fue lo que se ganó en 5 días, el valor de  $R$  es  $40\,000 \text{ ptas}/(5\text{d}) = 8000 \text{ ptas}/\text{día}$ . Por tanto, en 8 días la cantidad que se ganaría sería

$$M = (8000 \text{ ptas}/\text{d}) (8 \text{ d}) = 64\,000 \text{ ptas}$$

Sin embargo, no es preciso hallar explícitamente el jornal para resolver el problema. Como la cantidad ganada en 8 días debe ser  $\frac{8}{5}$  veces de la ganada en 5 días, esta cantidad es

$$M = \frac{8}{5} (40\,000 \text{ ptas}) = 64\,000 \text{ ptas}$$

Podemos utilizar un ejemplo semejante para ilustrar la proporción inversa. Si se consigue una subida del jornal del 25 por ciento, ¿cuánto tiempo será necesario trabajar para ganar 40 000 ptas? Consideremos ahora que  $R$  es una variable y deseamos obtener  $t$ :

$$t = \frac{M}{R}$$

En esta ecuación, el tiempo  $t$  es *inversamente proporcional* al jornal  $R$ . Así pues, si el nuevo jornal es  $\frac{5}{4}$  veces el antiguo, sólo se necesitará trabajar un tiempo igual a  $\frac{4}{5}$  veces del tiempo anterior, o sea 4 días.

Existen algunos casos en los que una magnitud varía como el cuadrado o alguna otra potencia de otra magnitud y entonces las ideas de proporcionalidad son también de gran utilidad. Supóngase, por ejemplo, que una pizza de 20 cm de diámetro cuesta 425 ptas. ¿Cuánto costará otra de 24 cm de diámetro? Es de suponer que el coste de una pizza sea proporcional aproximadamente a la cantidad de su contenido, que es proporcional al área de la misma. Como este área es a su vez proporcional al cuadrado del diámetro, el costo será proporcional al cuadrado del diámetro. Si aumentamos el diámetro en un factor de  $24/20$ , el área aumenta en un factor de  $(24/20)^2 = 1,44$ , de modo que el costo deberá ser de  $(1,44)(425 \text{ ptas}) = 612 \text{ ptas}$ .

### Ejemplo A-3

La intensidad de la luz procedente de un foco puntual varía inversamente con el cuadrado de la distancia al foco. Si a 5 m de éste la intensidad es de  $3,20 \text{ W/m}^2$ , ¿cuál será a 6 m del mismo?

La ecuación que expresa el hecho de que la intensidad varía inversamente con el cuadrado de la distancia puede escribirse

$$I = \frac{C}{r^2}$$

en donde  $C$  es una cierta constante. Entonces, si  $I_1 = 3,20 \text{ W/m}^2$  a  $r_1 = 5 \text{ m}$  e  $I_2$  es la intensidad desconocida a  $r_2 = 6 \text{ m}$ , se tendrá

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{C/r_2^2}{C/r_1^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0,694$$

La intensidad a 6 m del foco es, pues,

$$I_2 = 0,694(3,20 \text{ W/m}^2) = 2,22 \text{ W/m}^2$$

### Ecuaciones lineales

Una ecuación en donde las variables aparecen elevadas sólo a la primera potencia se dice que es lineal. Una ecuación lineal que relacione  $x$  e  $y$  puede ponerse siempre en la forma estándar

$$y = mx + b \tag{A-1}$$

en donde  $m$  y  $b$  son constantes que pueden ser positivas o negativas. En la figura A-1 se ve un gráfico de los valores de  $x$  e  $y$  que satisfacen la ecuación A-1. La constante  $b$ , denominada **ordenada en el origen**, es el valor que toma  $y$  para  $x=0$ . La constante  $m$  es la **pendiente** de la línea, que es igual al cociente entre la variación de  $y$  y la variación correspondiente de  $x$ . En la figura se han indicado dos puntos en la recta,  $x_1, y_1$  y  $x_2, y_2$  y las variaciones  $\Delta x = x_2 - x_1$  y  $\Delta y = y_2 - y_1$ . La pendiente  $m$  es entonces

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

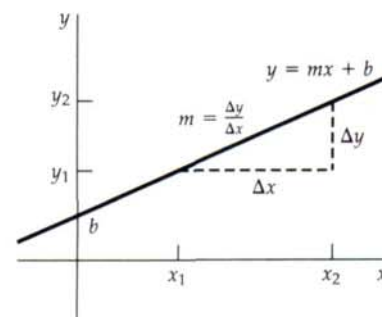


Figura A-1 Representación gráfica de la ecuación lineal  $y = mx + b$ , en donde  $b$  es la ordenada en el origen y  $m = \Delta y/\Delta x$  es la pendiente.

Si se desconocen tanto  $x$  como  $y$ , no hay una solución única para sus valores. Cualquier par de valores  $x_1, y_1$  de la línea de la figura A-1 satisfará la ecuación. Si tenemos dos ecuaciones, con las mismas incógnitas  $x$  e  $y$ , pueden resolverse mutuamente ambas para hallar simultáneamente las incógnitas.

**Ejemplo A-4**

Hallar los valores de  $x$  e  $y$  que satisfacen simultáneamente

$$3x - 2y = 8 \quad \text{A-2}$$

y

$$y - x = 2 \quad \text{A-3}$$

La figura A-2 muestra ambas ecuaciones en un solo gráfico. En el punto en que se cortan ambas líneas, los valores de  $x$  e  $y$  satisfacen a la vez ambas ecuaciones. Podemos resolver dos ecuaciones simultáneas despejando primero en una de ellas una de las variables en función de la otra, y sustituyendo luego el resultado en la otra ecuación. A partir de la ecuación A-3, se tiene

$$y = x + 2$$

Sustituyendo este valor de  $y$  en la ecuación A-2, obtenemos

$$3x - 2(x + 2) = 8$$

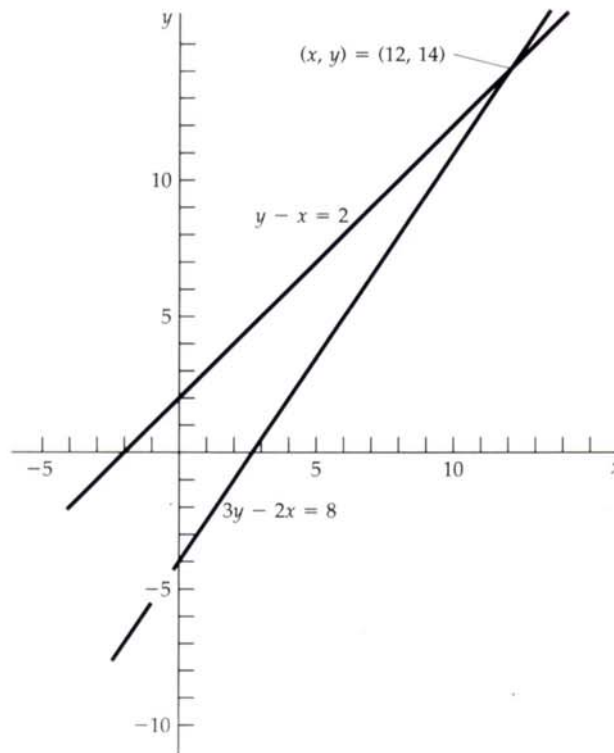
$$3x - 2x - 4 = 8$$

$$x = 12$$

Entonces

$$y = x + 2 = 14$$

Otro método alternativo, que a veces es más sencillo, consiste en multiplicar una de las ecuaciones por una constante tal que se elimine uno de los



**Figura A-2** Representación gráfica de las ecuaciones A-2 y A-3. En el punto de corte de ambas rectas, los valores de  $x$  e  $y$  satisfacen ambas ecuaciones.



términos incógnita cuando luego se sumen o resten las ecuaciones. Si multiplicamos la ecuación A-3 por 2, podemos sumar la ecuación resultante a A-2 y eliminar  $y$ :

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ 2y - 2x &= 4 \end{aligned}$$

Sumando, se obtiene  $3x - 2x = 12$ , o sea  $x = 12$ , como antes.

### Factorización

A menudo es posible simplificar las ecuaciones factorizando. Los tres ejemplos siguientes son importantes

1. Factor común:  $2ax + 3ay = a(2x + 3y)$
2. Cuadrado perfecto:  $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$
3. Diferencia de cuadrados:  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

### La ecuación de segundo grado

Una ecuación que contiene la incógnita elevada al cuadrado se denomina *ecuación de segundo grado*. La forma estándar de esta ecuación es

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{A-4}$$

siendo  $a$ ,  $b$  y  $c$ , constantes. La solución general de esta ecuación es

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac} \tag{A-5}$$

Cuando  $b^2$  es mayor que  $4ac$ , existen dos soluciones correspondientes a los signos  $+$  y  $-$ . En la figura A-3 se ve un gráfico de  $y$  en función de  $x$  en donde  $y = ax^2 + bx + c$ . La curva, llamada **parábola**, corta al eje  $x$  dos veces. Los valores de  $x$  para los que  $y = 0$  son las soluciones de la ecuación A-4. Cuando  $b^2 < 4ac$ , la curva de  $y$  en función de  $x$  no corta al eje  $x$ , como se ve en la figura A-4, y no existen soluciones reales de la ecuación A-4. Cuando  $b^2 = 4ac$ , la curva de  $y$  en función de  $x$  es tangente al eje  $x$  en el punto  $x = -b/2a$ .

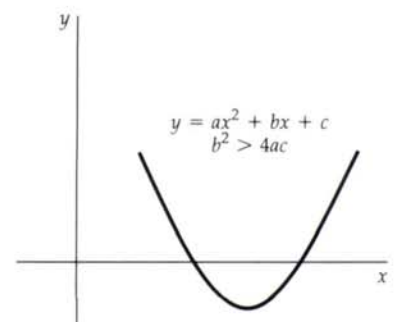


Figura A-3 Representación de  $y$  en función de  $x$  cuando  $y = ax^2 + bx + c$  en el caso en que  $b^2 > 4ac$ . Los dos valores de  $x$  en los que  $y = 0$  satisfacen la ecuación de segundo grado (ecuación A-4).

### Exponentes

La notación  $x^n$  indica la cantidad que se obtiene al multiplicar  $x$  por sí mismo  $n$  veces. Por ejemplo,  $x^2 = x \cdot x$  y  $x^3 = x \cdot x \cdot x$ . La cantidad  $n$  se denomina la **potencia**, o el **exponente**, de  $x$ . Cuando dos potencias de  $x$  se multiplican, los exponentes se suman:

$$(x^m)(x^n) = x^{m+n} \tag{A-6}$$

Esto puede comprobarse fácilmente con un ejemplo:

$$x^2x^3 = (x \cdot x)(x \cdot x \cdot x) = x^5$$

Por definición, todo número elevado a la potencia 0 es la unidad:

$$x^0 = 1 \tag{A-7}$$

Entonces,

$$x^n x^{-n} = x^0 = 1$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \tag{A-8}$$

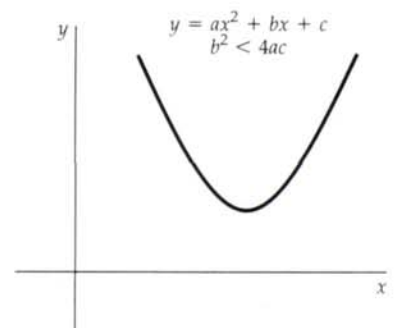


Figura A-4 Representación gráfica de  $y$  en función de  $x$  cuando  $y = ax^2 + bx + c$  y se tiene que  $b^2 < 4ac$ . En este caso no existen valores (reales) de  $x$  para los que  $y = 0$ .

Cuando dos potencias se dividen, los exponentes se restan

$$\frac{x^n}{x^m} = x^n x^{-m} = x^{n-m} \quad \text{A-9}$$

Con estas reglas se tiene

$$x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x$$

de modo que

$$x^{1/2} = \sqrt{x}$$

Cuando una potencia se eleva a otra potencia, los exponentes se multiplican:

$$(x^n)^m = x^{nm} \quad \text{A-10}$$

### Logaritmos

Cuando  $y$  está relacionado con  $x$  mediante la expresión  $y = a^x$ , se dice que el número  $x$  es el logaritmo de  $y$  en base  $a$  y se escribe

$$x = \log_a y$$

Si  $y_1 = a^n$  e  $y_2 = a^m$ , entonces

$$y_1 y_2 = a^n a^m = a^{n+m}$$

y

$$\log_a y_1 y_2 = n + m = \log_a y_2 + \log_a y_1 \quad \text{A-11}$$

Se deduce entonces que

$$\log_a y^n = n \log_a y \quad \text{A-12}$$

Como  $a^1 = a$  y  $a^0 = 1$ ,

$$\log_a a = 1 \quad \text{A-13}$$

y

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{A-14}$$

Existen dos bases de uso común: base 10, y entonces se llaman **logaritmos comunes** o **decimales** y base  $e$  ( $e = 2,728\dots$ ), llamados **logaritmos naturales** o **neperianos**. Cuando no se especifica la base, se sobreentiende que es 10. Así,  $\log 100 = \log_{10} 100 = 2$ , puesto que  $100 = 10^2$ .

Para los logaritmos naturales se utiliza el símbolo  $\ln$ . Así

$$y = \ln x \quad \text{A-15}$$

implica

$$x = e^y \quad \text{A-16}$$

Los logaritmos pueden transformarse de una base a otra. Supongamos que

$$z = \log x \quad \text{A-17}$$

Entonces

$$10^z = x \quad \text{A-18}$$

Tomando logaritmos naturales de ambos miembros de la ecuación A-18, se obtiene

$$z \ln 10 = \ln x$$

o bien

$$\ln x = (\ln 10) \log x \quad \text{A-19}$$

### La función exponencial

Cuando el ritmo de cambio de una cantidad es proporcional a la propia cantidad, ésta aumenta o disminuye exponencialmente. Un ejemplo del *decrecimiento exponencial* es la desintegración nuclear. Si el número de núcleos radiactivos en un cierto instante es  $N$ , entonces su variación  $dN$  en un determinado intervalo de tiempo  $dt$  muy pequeño será proporcional a  $N$  y a  $dt$ :

$$dN = -\lambda N dt$$

en donde la constante de proporcionalidad  $\lambda$  es la constante de desintegración. La función  $N$  que satisface esta ecuación es

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \tag{A-20}$$

en donde  $N_0$  es el número en el instante  $t=0$ . La figura A-5 muestra  $N$  en función de  $t$ . Una característica del decrecimiento exponencial es que  $N$  disminuye en un factor constante en un intervalo de tiempo determinado. El intervalo de tiempo necesario para que  $N$  disminuya hasta su mitad se denomina su vida media  $t_{1/2}$ , que se relaciona con la constante de desintegración por

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} \tag{A-21}$$

Un ejemplo de *crecimiento exponencial* es el aumento de población. Si el número de organismos vivos es  $N$ , la variación de  $N$  al cabo de un intervalo de tiempo pequeño  $dt$  viene dado por

$$dN = + \lambda N dt$$

en donde  $\lambda$  es una constante que caracteriza el ritmo de crecimiento. La función  $N$  satisfaciendo esta ecuación es

$$N = N_0 e^{\lambda t} \tag{A-22}$$

En la figura A-6 se muestra un gráfico de esta función. Un crecimiento exponencial se caracteriza por un tiempo de duplicación  $T_2$ , que está relacionado con  $\lambda$  por

$$T_2 = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} \tag{A-23}$$

Si el ritmo de crecimiento  $\lambda$  se expresa como un porcentaje,  $r = \lambda/100\%$ , el tiempo de duplicación es

$$T_2 = \frac{69,3}{r} \tag{A-24}$$

Por ejemplo, si la población aumenta en un 2 por ciento cada año, la población se duplicará  $69,3/2 \approx 35$  años. En la tabla A-2 se relacionan algunas propiedades útiles de las funciones exponenciales y logarítmicas.

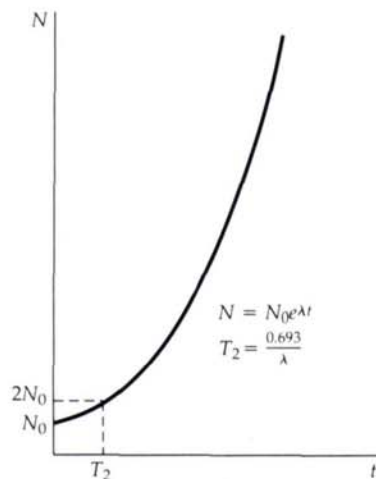


Figura A-6 Representación de  $N$  en función de  $t$  cuando  $N$  crece exponencialmente. El tiempo  $T_2$  es el tiempo que emplea  $N$  en duplicarse.

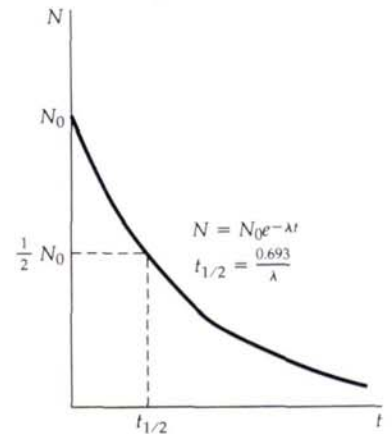
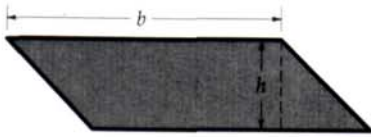


Figura A-5 Gráfico de  $N$  en función de  $t$  cuando  $N$  decrece exponencialmente. El tiempo  $t_{1/2}$  es el tiempo que se tarda en que  $N$  disminuya a la mitad.

Tabla A-2 Funciones exponenciales y logarítmicas

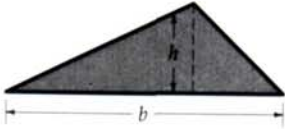
$e = 2,71828$	$e^0 = 1$
Si $y = e^x$ , entonces $x = \ln y$ .	
$e^{\ln x} = x$	
$e^x e^y = e^{(x+y)}$	
$(e^x)^y = e^{xy} = (e^y)^x$	
$\ln e = 1$	$\ln 1 = 0$
$\ln xy = \ln x + \ln y$	
$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$	
$\ln e^x = x$	$\ln a^x = x \ln a$
$\ln x = (\ln 10) \log x$	$= 2,3026 \log x$
$\log x = \log e \ln x = 0,43429 \ln x$	
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	





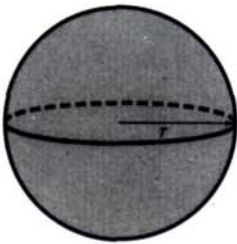
Área del paralelogramo  
 $A = bh$

Figura A-7 Área del paralelogramo.



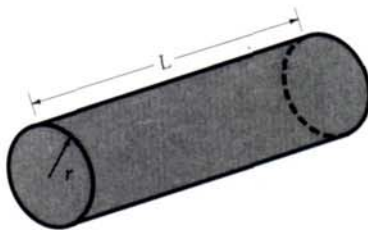
Área del triángulo  
 $A = \frac{1}{2}bh$

Figura A-8 Área del triángulo.



Área de la superficie esférica  
 $A = 4\pi r^2$   
 Volumen de la esfera  
 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Figura A-9 Área de la superficie esférica y volumen de la esfera.



Área de la superficie cilíndrica  
 $A = 2\pi rL$   
 Volumen del cilindro  
 $V = \pi r^2L$

Figura A-10 Área superficial (sin incluir las caras extremas) y volumen del cilindro.

### Geometría

El cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es un número irracional  $\pi$  que tiene el valor aproximado de

$$\pi = 3,141592$$

Así pues, la longitud de la circunferencia  $C$  está relacionada con el diámetro  $d$  y su radio  $r$  por

$$C = \pi d = 2\pi r \quad \text{longitud de la circunferencia} \quad \text{A-25}$$

El área del círculo es

$$A = \pi r^2 \quad \text{área del círculo} \quad \text{A-26}$$

El área de un paralelogramo es el producto de la longitud de su base  $b$  por la altura  $h$  (figura A-7), y la de un triángulo es la mitad de su base por la altura (figura A-8). Una esfera de radio  $r$  (figura A-9) tiene una superficie cuya área viene dada por

$$A = 4\pi r^2 \quad \text{área de la superficie esférica} \quad \text{A-27}$$

y un volumen dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{volumen de una esfera} \quad \text{A-28}$$

Un cilindro de radio  $r$  y longitud  $L$  (figura A-10) tiene un área de su superficie lateral (sin incluir las caras extremas) de

$$A = 2\pi rL \quad \text{superficie lateral de un cilindro} \quad \text{A-29}$$

y un volumen de

$$V = \pi r^2L \quad \text{volumen del cilindro} \quad \text{A-30}$$

### Trigonometría

El ángulo formado por dos rectas que se cortan se mide de la forma siguiente. Se dibuja una circunferencia con su centro en la intersección o vértice de ambas rectas, y se divide el arco de la circunferencia en 360 partes iguales llamadas **grados**. El número de grados abarcado por el arco comprendido entre las rectas o lados, es la medida del ángulo que forman ambas. Para ángulos muy pequeños, el grado se divide en minutos ( $'$ ) y segundos ( $''$ ) con  $1' = 1^\circ/60$  y  $1'' = 1'/60 = 1^\circ/3600$ . En el trabajo científico, una unidad más útil para los ángulos es el radián (rad), que se define como la longitud del arco circular comprendido entre los lados, dividida por el radio de la circunferencia (figura A-11). Si la longitud del arco es  $s$  y el radio de la circunferencia vale  $r$ , el ángulo  $\theta$  medido en radianes es

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{A-31}$$

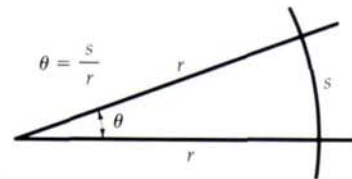


Figura A-11 Se define el ángulo  $\theta$  en radianes como el cociente  $s/r$ , siendo  $s$  la longitud del arco interceptado sobre una circunferencia de radio  $r$ .



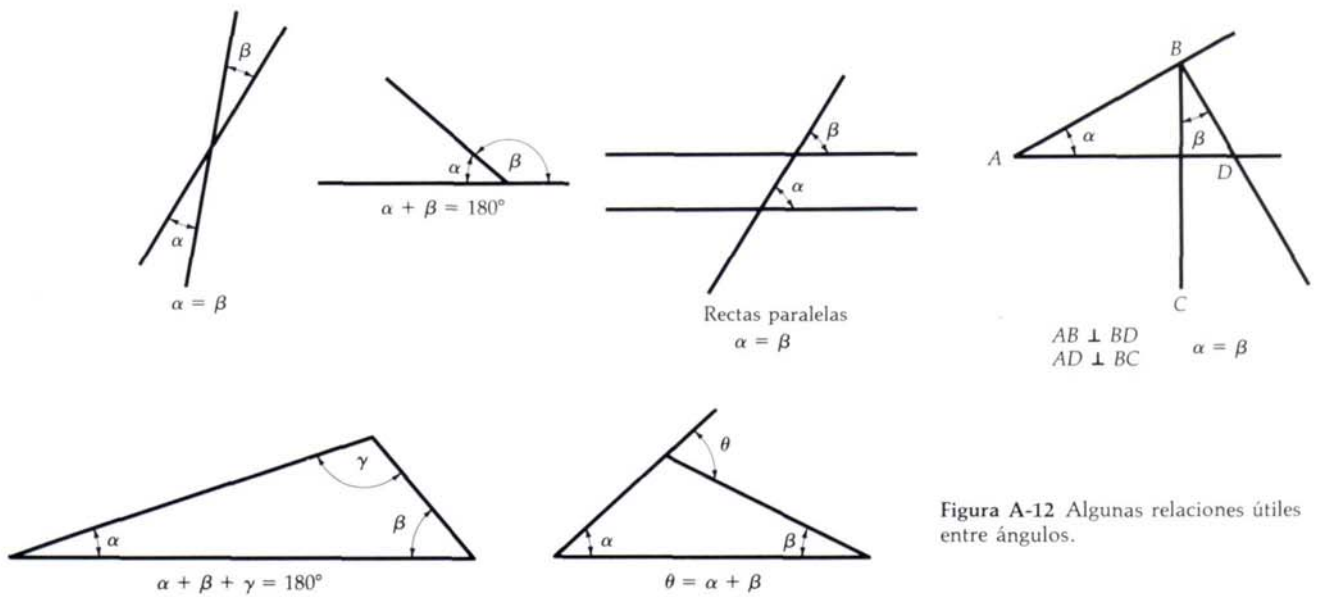


Figura A-12 Algunas relaciones útiles entre ángulos.

Como el ángulo medido en radianes es el cociente de dos longitudes, es adimensional. La relación entre radianes y grados es

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$

o sea

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57,3^\circ \tag{A-32}$$

En la figura A-12 se muestran algunas relaciones útiles entre ángulos.

En la figura A-13 se ha dibujado un triángulo rectángulo trazando la recta  $BC$  perpendicular a  $AC$ . Las longitudes de los lados se denominan  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Se definen las funciones trigonométricas  $\text{sen } \theta$ ,  $\text{cos } \theta$  y  $\text{tg } \theta$  de un ángulo agudo  $\theta$  como

$$\text{sen } \theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \tag{A-33}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \tag{A-34}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} \tag{A-35}$$

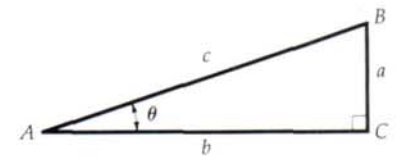


Figura A-13 Triángulo rectángulo con catetos de longitud  $a$  y  $b$  e hipotenusa de longitud  $c$ .

Existen otras tres funciones trigonométricas inversas de las anteriores:

$$\text{sec } \theta = \frac{c}{b} = \frac{1}{\text{cos } \theta} \tag{A-36}$$

$$\text{csc } \theta = \frac{c}{a} = \frac{1}{\text{sen } \theta} \tag{A-37}$$

$$\text{cot } \theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\text{tg } \theta} = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta} \tag{A-38}$$

El teorema de Pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{A-39}$$

nos permite obtener algunas identidades útiles. Si dividimos cada término de esta ecuación por  $c^2$ , se obtiene

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

o bien, a partir de las definiciones de  $\text{sen } \theta$  y  $\text{cos } \theta$ ,

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1 \tag{A-40}$$

Análogamente, se puede dividir cada término de la ecuación A-39 por  $a^2$  o  $b^2$  y obtener

$$1 + \text{cotg}^2 \theta = \text{cosec}^2 \theta \tag{A-41}$$

y

$$1 + \text{tg}^2 \theta = \text{sec}^2 \theta \tag{A-42}$$

En la tabla A-3 se relacionan éstas y otras fórmulas trigonométricas de interés.

Tabla A-3 Fórmulas trigonométricas

$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$	$\text{sec}^2 \theta - \text{tg}^2 \theta = 1$	$\text{cosec}^2 \theta - \text{cotg}^2 \theta = 1$
$\text{sen } 2\theta = 2 \text{sen } \theta \text{cos } \theta$		
$\text{cos } 2\theta = \text{cos}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta = 2 \text{cos}^2 \theta - 1 = 1 - 2 \text{sen}^2 \theta$		
$\text{tg } 2\theta = \frac{2 \text{tg } \theta}{1 - \text{tg}^2 \theta}$		
$\text{sen } \frac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{1 - \text{cos } \theta}{2}}$	$\text{cos } \frac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{1 + \text{cos } \theta}{2}}$	$\text{tg } \frac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{1 - \text{cos } \theta}{1 + \text{cos } \theta}}$
$\text{sen}(A \pm B) = \text{sen } A \text{cos } B \pm \text{cos } A \text{sen } B$		
$\text{cos}(A \pm B) = \text{cos } A \text{cos } B \mp \text{sen } A \text{sen } B$		
$\text{tg}(A \pm B) = \frac{\text{tg } A \pm \text{tg } B}{1 \mp \text{tg } A \text{tg } B}$		
$\text{sen } A \pm \text{sen } B = 2 \text{sen } \left[ \frac{1}{2}(A \pm B) \right] \text{cos } \left[ \frac{1}{2}(A \mp B) \right]$		
$\text{cos } A + \text{cos } B = 2 \text{cos } \left[ \frac{1}{2}(A + B) \right] \text{cos } \left[ \frac{1}{2}(A - B) \right]$		
$\text{cos } A - \text{cos } B = 2 \text{sen } \left[ \frac{1}{2}(A + B) \right] \text{sen } \left[ \frac{1}{2}(B - A) \right]$		
$\text{tg } A \pm \text{tg } B = \frac{\text{sen}(A \pm B)}{\text{cos } A \text{cos } B}$		

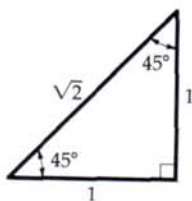


Figura A-14 Triángulo isósceles recto correspondiente al ejemplo A-5.

Ejemplo A-5

Utilizar el triángulo rectángulo isósceles de la figura A-14 para hallar el seno, el coseno y la tangente de  $45^\circ$ .

En la figura es evidente que los dos ángulos agudos son iguales. Como la suma de los tres ángulos de un triángulo vale  $180^\circ$  y el ángulo recto mide  $90^\circ$ , cada ángulo agudo debe medir  $45^\circ$ . Si multiplicamos cada lado de un triángulo cualquiera por un factor común, se obtiene otro triángulo semejante con los mismos ángulos que el primero. Como en las funciones trigonométricas intervienen los cocientes de sólo dos lados de un triángulo, podemos escoger una longitud conveniente cualquiera para uno de los lados. Hagamos igual a 1 unidad la longitud de los dos catetos iguales. Ahora puede calcularse la longitud de la hipotenusa a partir del teorema de Pitágoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ unidades}$$

Entonces se tienen el seno, el coseno y la tangente del ángulo de  $45^\circ$  aplicando las ecuaciones A-33, A-34, y A-35, respectivamente:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \quad \text{cos } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \quad \text{tg } 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

**Ejemplo A-6**

El seno de  $30^\circ$  vale exactamente  $\frac{1}{2}$ . Hallar las relaciones entre los lados de un triángulo rectángulo de ángulos  $30^\circ$  y  $60^\circ$ .

Este triángulo se ve en la figura A-15. Escojamos una longitud de 1 unidad para el cateto opuesto al ángulo de  $30^\circ$ . Se obtiene entonces la hipotenusa mediante la expresión:

$$c = \frac{a}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{1}{0,5} = 2$$

La longitud del lado opuesto al ángulo de  $60^\circ$  se halla mediante el teorema de Pitágoras:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

Con estos resultados se pueden obtener las siguientes funciones trigonométricas de los ángulos de  $30^\circ$  y de  $60^\circ$ :

$$\cos 30^\circ = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$$

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577$$

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{b}{c} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{c} = \text{sen } 30^\circ = 0,500$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = 1,732$$

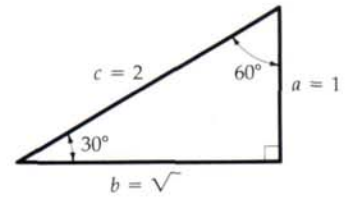


Figura A-15 Triángulo rectángulo de ángulos  $30^\circ$ - $60^\circ$  del ejemplo A-6.

En el caso de ángulos pequeños, la longitud  $a$  es casi igual a la longitud  $s$  del arco, como puede verse en la figura A-16. Por tanto, el ángulo  $\theta = s/c$  es casi igual a  $\text{sen } \theta = a/c$ :

$$\text{sen } \theta \approx \theta \quad \text{para valores pequeños de } \theta \quad \text{A-43}$$

Análogamente, las longitudes  $c$  y  $b$  son casi iguales, de forma que  $\text{tg } \theta = a/b$  es también casi igual tanto a  $\theta$  como a  $\text{sen } \theta$  para valores pequeños de  $\theta$ :

$$\text{tg } \theta \approx \text{sen } \theta \approx \theta \quad (\text{para valores pequeños de } \theta) \quad \text{A-44}$$

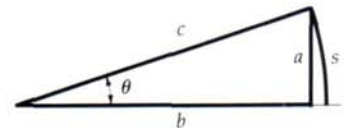


Figura A-16 En el caso de ángulos pequeños,  $\text{sen } \theta = a/c$ ,  $\text{tg } \theta = a/b$  y el ángulo  $\theta = s/c$  son todos ellos aproximadamente iguales.

Las ecuaciones A-43 y A-44 son válidas únicamente si  $\theta$  se mide en radianes. Como  $\cos \theta = b/c$  y estas longitudes son prácticamente iguales para valores pequeños de  $\theta$ , tenemos

$$\cos \theta \approx 1 \quad \text{para valores pequeños de } \theta \quad \text{A-45}$$

**Ejemplo A-7**

¿En cuánto difieren entre sí el  $\text{sen } \theta$ , la  $\text{tg } \theta$  y  $\theta$  cuando  $\theta = 15^\circ$ ?

El valor de este ángulo en radianes es

$$\theta = 15^\circ \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = 0,262 \text{ rad}$$

Utilizando una calculadora o una tabla de funciones trigonométricas se obtiene

$$\text{sen } 15^\circ = 0,259$$



y

$$\text{tg } 15^\circ = 0,268$$

Así pues, el  $\text{sen } \theta$  y  $\theta$  (en radianes) difieren en 0,003, es decir aproximadamente el 1 por ciento, y la  $\text{tg } \theta$  y  $\theta$  difieren en 0,006, o sea cerca del 2 por ciento. En el caso de ángulos menores, la aproximación  $\theta \approx \text{sen } \theta \approx \text{tg } \theta$  es incluso más exacta.

El ejemplo A-7 muestra que si se necesita una aproximación del orden de algunas unidades por ciento o menos, pueden utilizarse las aproximaciones de los ángulos pequeños solamente para ángulos inferiores a  $15^\circ$ . En la figura A-17 puede verse un gráfico de  $\theta$ ,  $\text{sen } \theta$  y  $\text{tg } \theta$  para valores pequeños de  $\theta$ .

Figura A-17 Gráficos de  $\text{tg } \theta$ ,  $\theta$  y  $\text{sen } \theta$  en función de  $\theta$  para pequeños valores de  $\theta$ .

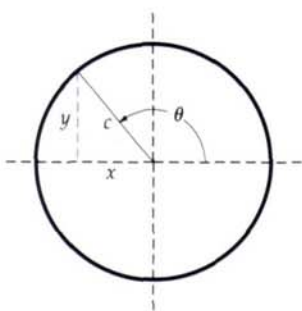
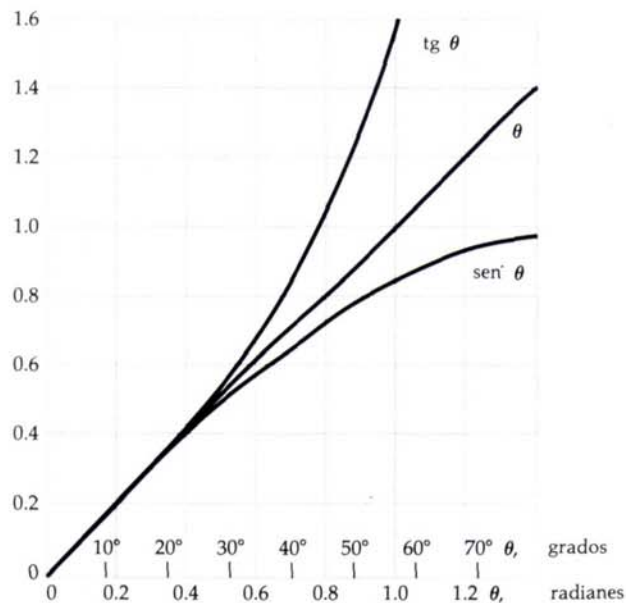


Figura A-18 Diagrama para definir las funciones trigonométricas en un ángulo obtuso.

En la figura A-18 se ha indicado un ángulo obtuso con su vértice en el origen y un lado sobre el eje  $x$ . Se definen las funciones trigonométricas correspondientes a un ángulo genérico como este en la forma

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{c} \tag{A-46}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{x}{c} \tag{A-47}$$

$$\text{tg } \theta = \frac{y}{x} \tag{A-48}$$

En la figura A-19 se han representado estas funciones en función de  $\theta$ . Todas las funciones trigonométricas tienen un período de  $2\pi$ . Es decir, cuando un ángulo varía en  $2\pi$  rad, las funciones vuelven a tener su valor original. Así,  $\text{sen } (\theta + 2\pi) = \text{sen } \theta$  y así sucesivamente. Otras relaciones útiles son

$$\text{sen } (\pi - \theta) = \text{sen } \theta \tag{A-49}$$

$$\text{cos } (\pi - \theta) = -\text{cos } \theta \tag{A-50}$$

$$\text{sen } (\pi/2 - \theta) = \text{cos } \theta \tag{A-51}$$

$$\text{cos } (\pi/2 - \theta) = \text{sen } \theta \tag{A-52}$$

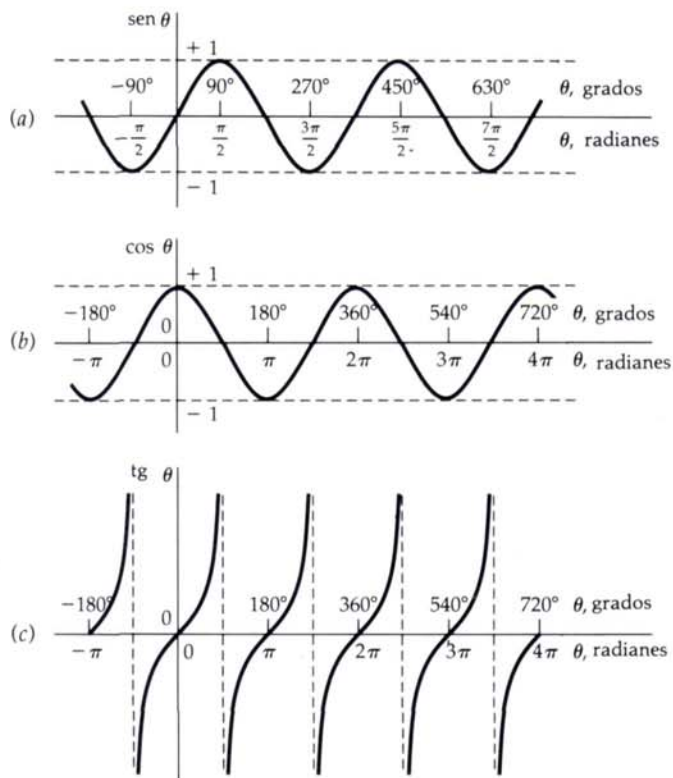


Figura A-19 Funciones trigonométricas  $\text{sen } \theta$ ,  $\text{cos } \theta$  y  $\text{tg } \theta$  en función de  $\theta$ .

Las funciones trigonométricas pueden expresarse en series de potencias de  $\theta$ . Las series para el  $\text{sen } \theta$  y el  $\text{cos } \theta$  son

$$\text{sen } \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad \text{A-53}$$

$$\text{cos } \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad \text{A-54}$$

Cuando  $\theta$  es pequeño, se obtienen buenas aproximaciones utilizando sólo los primeros términos de las series.

### Desarrollo del binomio

El teorema del binomio es de gran utilidad para hacer aproximaciones. Una forma del mismo es

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} x^4 + \dots \quad \text{A-55}$$

Si  $n$  es un número entero positivo, existen  $n+1$  términos en esta serie. Si  $n$  es un número real diferente que un entero positivo, el número de términos es infinito. La serie es válida para cualquier valor de  $n$  si  $x^2$  es menor que 1. También es válida para  $x^2=1$  si  $n$  es positivo. La serie resulta particularmente útil si  $|x|$  es mucho menor que 1. Entonces cada término es mucho menor que el anterior y podemos despreciar todos ellos, excepto los dos o tres primeros términos. Si  $|x|$  es mucho menor que 1, se tiene

$$(1+x)^n \approx 1+nx \quad |x| \ll 1 \quad \text{A-56}$$

**Ejemplo A-8**

Utilizar la ecuación A-56 para hallar un valor aproximado de la raíz cuadrada de 101.

En primer lugar pongamos el problema en la forma  $(1+x)^n$  con  $x$  mucho menor que 1:

$$(101)^{1/2} = (100+1)^{1/2} = (100)^{1/2} (1+0,01)^{1/2} = 10(1+0,01)^{1/2}$$

Ahora podemos utilizar la ecuación A-56 con  $n = \frac{1}{2}$  y  $x=0,01$ :

$$(1+0,01)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}(0,01) = 1,005$$

Entonces

$$(101)^{1/2} \approx 10(1,005) = 10,05$$

Podemos hacernos una idea de la exactitud de esta aproximación examinando el primer término de la ecuación A-55 que se ha despreciado. Este término es

$$\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

Como  $x$  es 0,01,  $x^2$  vale 0,0001 y

$$\frac{n(n-1)}{2}x^2 = \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2}(0,0001) = -\frac{0,0001}{8} \approx -0,00001 = -0,001\%$$

Por consiguiente, es de esperar que la respuesta sea correcta dentro de un 0,001 por ciento aproximadamente. El valor de  $(101)^{1/2}$  con ocho cifras significativas es 10,049876, que difiere de nuestro valor aproximado de 10,05 en 0,000124 o sea aproximadamente el 0,001% de 10,05.

**Números complejos**

Un número complejo  $z$ , en general, puede escribirse como

$$z = a + bi \tag{A-57}$$

en donde  $a$  y  $b$  son números reales e  $i = \sqrt{-1}$ . La cantidad  $a$  se llama la parte real e  $ib$  la parte imaginaria de  $z$ . Podemos representar un número complejo en un plano como se ve en la figura A-20, en donde el eje  $x$  es el eje real y el eje  $y$  es el imaginario. Pueden utilizarse las relaciones  $a = r \cos \theta$  y  $b = r \sin \theta$  de la figura A-20 para escribir el número complejo  $z$  en coordenadas polares:

$$z = r \cos \theta + (r \sin \theta)i \tag{A-58}$$

en donde  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ , se denomina el módulo o magnitud de  $z$ .

Cuando se han de sumar o restar números complejos, han de sumarse o restarse por separado sus partes reales y sus partes imaginarias:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \tag{A-59}$$

Sin embargo, cuando se han de multiplicar dos números complejos, se deben multiplicar cada parte de un factor por cada parte de otro:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1 a_2 + b_1 b_2 i^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \end{aligned} \tag{A-60}$$

en donde hemos utilizado  $i^2 = -1$ .

El complejo conjugado de un número complejo  $z^*$  es aquel número que se obtiene sustituyendo  $i$  por  $-i$ :

$$z^* = (a + bi)^* = a - bi \tag{A-61}$$

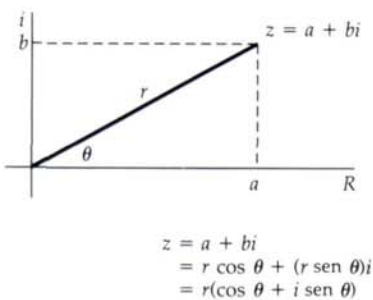


Figura A-20 Representación de un número complejo en un plano. La parte real del número complejo se representa a lo largo del eje horizontal y la parte imaginaria a lo largo del eje vertical.



El producto de un número complejo por su complejo conjugado es igual al cuadrado del módulo de dicho número:

$$zz^* = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \quad \text{A-62}$$

Una función de un número complejo particularmente útil es el exponencial  $e^{i\theta}$ . Utilizando el desarrollo  $e^z$  dado en la tabla A-2, se tiene

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots$$

Utilizando  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = +1$ , y así sucesivamente y separando las partes reales de las imaginarias, este desarrollo puede escribirse como

$$e^{i\theta} = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots)$$

Comparando este resultado con las ecuaciones A-53 y A-54, podemos ver que

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \quad \text{A-63}$$

Utilizando este resultado, podemos expresar un número complejo en general como un exponencial

$$z = a + bi = r \cos \theta + (r \operatorname{sen} \theta)i = re^{i\theta} \quad \text{A-64}$$

en donde  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

### Cálculo diferencial

Cuando decimos que  $x$  es una función de  $t$ , queremos significar que para cada valor de  $t$  existe un valor correspondiente de  $x$ . Un ejemplo es  $x = At^2$ , siendo  $A$  una constante. Para indicar que  $x$  es función de  $t$  a veces escribimos simplemente  $x(t)$ . La figura A-21 muestra un gráfico de  $x$  en función de  $t$  para una función típica  $x(t)$ . Para un valor particular  $t = t_1$ ,  $x$  tiene el valor  $x_1$ , como está indicado; y para otro valor  $t_2$ ,  $x$  tiene el valor  $x_2$ . La variación o incremento de  $t$ ,  $t_2 - t_1$ , se escribe  $\Delta t = t_2 - t_1$  y el correspondiente a  $x$ , se escribe  $\Delta x = x_2 - x_1$ . El cociente  $\Delta x / \Delta t$  es la pendiente de la recta que une los puntos  $(x_1, t_1)$  y  $(x_2, t_2)$ . Si hacemos a  $\Delta t$  cada vez menor, la recta que acabamos de mencionar tiende a convertirse en la tangente a la curva en el punto  $(x_1, t_1)$ . La pendiente de esta recta tangente se denomina la derivada de  $x$  respecto a  $t$  y se escribe  $dx/dt$ :

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{A-65}$$

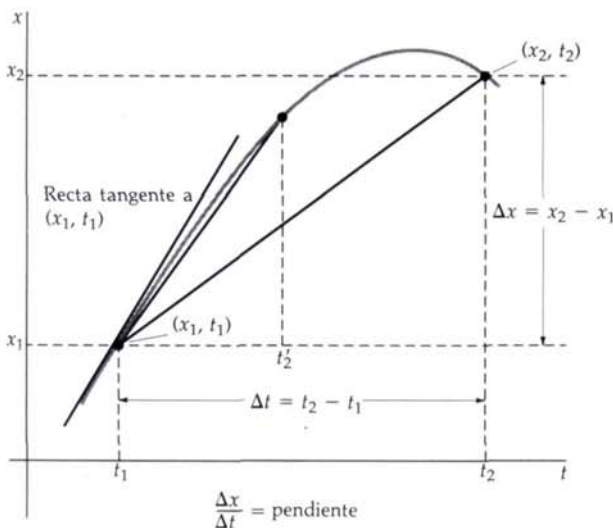


Figura A-21 Representación gráfica de una función típica  $x(t)$ . Los puntos  $(x_1, t_1)$  y  $(x_2, t_2)$  están unidos por una recta, cuya pendiente es  $\Delta x / \Delta t$ . Cuando disminuye el intervalo de tiempo que comienza en  $t_1$ , la pendiente de dicho intervalo se aproxima a la pendiente de la tangente a la curva en el instante  $t_1$ , que es la derivada de  $x$  respecto a  $t$ .

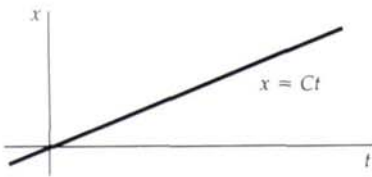


Figura A-22 Representación de la función lineal  $x = Ct$ . Esta función tiene una pendiente constante  $C$ .

La derivada de una función de  $t$  es otra función de  $t$ . Si  $x$  es una constante, la gráfica de  $x$  en función de  $t$  es una recta horizontal con pendiente cero. La derivada de una constante es, por tanto, nula. En la figura A-22,  $x$  es proporcional a  $t$ :

$$x = Ct$$

Esta función tiene una pendiente constante igual a  $C$ . Por tanto, la derivada de  $Ct$  es  $C$ . En la tabla A-4 se relacionan algunas propiedades de las derivadas de ciertas funciones particulares que suelen encontrarse en física. Están seguidas de ciertos comentarios que pretenden hacer estas propiedades y reglas más claras. Puede encontrarse un estudio más detallado en cualquier libro de cálculo.

Tabla A-4 Propiedades de las derivadas y derivadas de funciones particulares

**Linealidad**

1. La derivada de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función:

$$\frac{d}{dt} [Cf(t)] = C \frac{df(t)}{dt}$$

2. La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones:

$$\frac{d}{dt} [f(t) + g(t)] = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

**Regla de la cadena.**

3. Si  $f$  es función de  $x$  y a su vez  $x$  es función de  $t$ , la derivada de  $f$  respecto a  $t$  es igual al producto de la derivada de  $f$  respecto a  $x$  por la derivada de  $x$  respecto a  $t$ :

$$\frac{d}{dt} f(x) = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}$$

**Derivada de un producto**

4. La derivada de un producto de funciones  $f(t)g(t)$  es igual a la primera función multiplicada por la derivada de la segunda más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera:

$$\frac{d}{dt} [f(t)g(t)] = f(t) \frac{dg(t)}{dt} + \frac{df(t)}{dt} g(t)$$

**Derivada inversa**

5. La derivada de  $t$  respecto a  $x$  es la recíproca de la derivada de  $x$  respecto a  $t$ , admitiendo que ninguna de ellas sea nula:

$$\frac{dx}{dt} = \left( \frac{dt}{dx} \right)^{-1} \quad \text{si} \quad \frac{dt}{dx} \neq 0$$

**Derivadas de funciones particulares**

6.  $\frac{dC}{dt} = 0$  siendo una constante

9.  $\frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega \sin \omega t$

7.  $\frac{d(t^n)}{dt} = nt^{n-1}$

10.  $\frac{d}{dt} e^{bt} = be^{bt}$

8.  $\frac{d}{dt} \sin \omega t = \omega \cos \omega t$

11.  $\frac{d}{dt} \ln bt = \frac{1}{t}$

**Ejemplo A-9**

Hallar la derivada de  $x=at^2+bt+c$ , siendo  $a$ ,  $b$  y  $c$  constantes.

A partir de la regla 2, podemos derivar cada término por separado y sumar los resultados. Utilizando las reglas 1 y 7 se tiene

$$\frac{d(at^2)}{dt} = 2at^1 = 2at$$

Análogamente,  $d(bt)/dt=b$  y  $dc/dt=0$ . Sumando estos resultados, se obtiene

$$\frac{dx}{dt} = 2at + b$$

**Comentarios a las reglas de 1 a 5**

Las reglas 1 y 2 se siguen del hecho de que el proceso de límite es lineal. Podemos comprender la regla 3, la regla de la cadena, multiplicando  $\Delta f/\Delta t$  por  $\Delta x/\Delta x$  y observando que, puesto que  $x$  es una función de  $t$ , tanto  $\Delta x$  como  $\Delta f$  tienden a cero cuando  $\Delta t$  tiende a cero. Como el límite del producto de dos funciones es igual al producto de sus límites, se tiene

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \right) \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}$$

La regla 4 no es evidente de forma inmediata. La derivada de un producto de funciones es el límite del cociente

$$\frac{f(t+\Delta t)g(t+\Delta t) - f(t)g(t)}{\Delta t}$$

Si sumamos y restamos la cantidad  $f(t+\Delta t)g(t)$  en el numerador, podemos escribir este cociente como

$$\begin{aligned} \frac{f(t+\Delta t)g(t+\Delta t) - f(t+\Delta t)g(t) + f(t+\Delta t)g(t) - f(t)g(t)}{\Delta t} \\ = f(t+\Delta t) \left[ \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] + g(t) \left[ \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] \end{aligned}$$

Cuando  $\Delta t$  tiende a cero, los términos entre corchetes se convierten en  $dg(t)/dt$  y  $df(t)/dt$ , respectivamente, y el límite de esta expresión es

$$f(t) \frac{dg(t)}{dt} + g(t) \frac{df(t)}{dt}$$

La regla 5 se deduce directamente de la definición:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^{-1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^{-1} = \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^{-1}$$

**Comentarios a la regla 7**

Podemos obtener este importante resultado utilizando el desarrollo del binomio. Se tiene

$$\begin{aligned} f(t) &= t^n \\ f(t+\Delta t) &= (t+\Delta t)^n = t^n \left( 1 + \frac{\Delta t}{t} \right)^n \\ &= t^n \left[ 1 + n \frac{\Delta t}{t} + \frac{n(n-1)}{2!} \left( \frac{\Delta t}{t} \right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \left( \frac{\Delta t}{t} \right)^3 + \dots \right] \end{aligned}$$



Entonces

$$f(t - \Delta t) - f(t) = t^n \left[ n \frac{\Delta t}{t} + \frac{n(n-1)}{2!} \left( \frac{\Delta t}{t} \right)^2 + \dots \right]$$

y

$$\frac{f(t - \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = nt^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} t^{n-2} \Delta t + \dots$$

El término siguiente que se ha omitido de la última suma es proporcional a  $(\Delta t)^2$ , el siguiente lo es  $(\Delta t)^3$ , y así sucesivamente. Todos los términos excepto el primero tienden a cero cuando  $\Delta t$  tiende a cero. Así pues,

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = nt^{n-1}$$

**Comentarios a las reglas 8 y 9**

Escribiremos  $\omega t = \text{sen } \theta$  siendo  $\theta = \omega t$  y utilizaremos la regla de la cadena,

$$\frac{d \text{sen } \theta}{dt} = \frac{d \text{sen } \theta}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d \text{sen } \theta}{d\theta}$$

Luego emplearemos la fórmula trigonométrica correspondiente al seno de la suma de dos ángulos  $\theta$  y  $\Delta\theta$ :

$$\text{sen } (\theta + \Delta\theta) = \text{sen } \Delta\theta \cos \theta + \cos \Delta\theta \text{sen } \theta$$

Como  $\Delta\theta$  ha de tender a cero, podemos utilizar las aproximaciones correspondientes a ángulos pequeños

$$\text{sen } \Delta\theta \approx \Delta\theta \quad \text{y} \quad \cos \Delta\theta \approx 1$$

Entonces

$$\text{sen } (\theta + \Delta\theta) \approx \Delta\theta \cos \theta + \text{sen } \theta$$

y

$$\frac{\text{sen } (\theta + \Delta\theta) - \text{sen } \theta}{\Delta\theta} \approx \cos \theta$$

Puede aplicarse un razonamiento semejante a la función coseno para obtener la regla 9

**Comentarios a la regla 10**

Una vez más utilizamos la regla de la cadena

$$\frac{de^\theta}{dt} = b \frac{de^\theta}{d\theta} \quad \text{con} \quad \theta = bt$$

y el desarrollo en serie de la función exponencial:

$$e^{\theta + \Delta\theta} = e^\theta e^{\Delta\theta} = e^\theta \left[ 1 + \Delta\theta + \frac{(\Delta\theta)^2}{2!} + \frac{(\Delta\theta)^3}{3!} + \dots \right]$$

Entonces

$$\frac{e^{\theta + \Delta\theta} - e^\theta}{\Delta\theta} = e^\theta + e^\theta \frac{\Delta\theta}{2!} + e^\theta \frac{(\Delta\theta)^2}{3!} + \dots$$

Cuando  $\Delta\theta$  tiende a cero, el segundo miembro de la ecuación anterior tiende a  $e^\theta$ .

**Comentarios a la regla 11**

Sea

$$y = \ln bt$$

Entonces

$$e^y = bt \quad \text{y} \quad \frac{dt}{dy} = \frac{1}{b} \quad e^y = t$$

Entonces utilizando la regla 5, se obtiene

$$\frac{dy}{dt} = \left( \frac{dt}{dy} \right)^{-1} = \frac{1}{t}$$

### Cálculo integral

La integración está relacionada con el problema de hallar el área bajo una curva. Es también la operación inversa de la derivación. La figura A-23 muestra una función  $f(t)$ . El área del elemento sombreado es aproximadamente  $f_i \Delta t_i$ , en donde  $f_i$  se evalúa en un punto cualquiera del intervalo  $\Delta t_i$ . Esta aproximación mejora si  $\Delta t_i$  es muy pequeño. Se halla el área total desde  $t_1$  hasta  $t_2$  sumando todos los elementos de área desde  $t_1$  a  $t_2$  y tomando el límite cuando cada  $\Delta t_i$  tiende a cero. Este límite se denomina la integral de  $f$  respecto a  $t$  y se escribe

$$\int_{t_1}^{t_2} f dt = \text{Área} = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_i f_i \Delta t_i$$

Si integramos una cierta función  $f(t)$  desde  $t_1$  hasta cierto valor genérico de  $t$ , se obtiene otra función de  $t$ . Llamemos  $y$  a esta nueva función:

$$y = \int_{t_1}^t f dt$$

La función  $y$  es el área bajo la curva de  $f$  en función de  $t$  desde  $t_1$  hasta un cierto valor general  $t$ . En el caso de un intervalo  $\Delta t$  pequeño, la variación en el área  $\Delta y$  es aproximadamente  $f \Delta t$ .

$$\Delta y \approx f \Delta t$$

$$f \approx \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

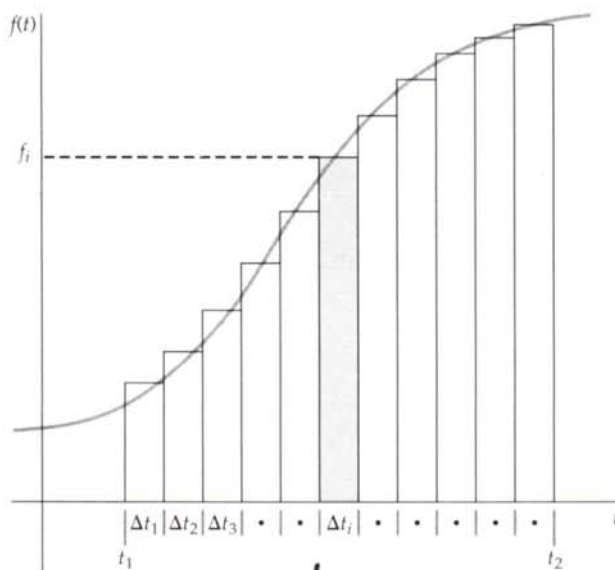


Figura A-23 Función general  $f(t)$ . El área del elemento sombreado es aproximadamente  $f_i \Delta t_i$ , en donde  $f_i$  se calcula para un punto cualquiera del intervalo.

Si tomamos el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero, podemos ver que  $f$  es la derivada de  $y$ :

$$f = \frac{dy}{dt}$$

La relación entre  $y$  y  $f$  suele escribirse

$$y = \int f dt$$

en donde  $\int f dt$  se denomina **integral indefinida**. Para calcular una integral indefinida, se halla la función  $y$  cuya derivada es  $f$ . La integral definida de  $f$  desde  $t_1$  hasta  $t_2$  es  $y(t_2) - y(t_1)$ , en donde  $df/dt = y$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} f dt = y(t_2) - y(t_1)$$

### Ejemplo A-10

Hallar la integral indefinida de  $f(t) = t$ .

La función cuya derivada es  $t$  es  $\frac{1}{2}t^2$  más una constante. Así pues,

$$\int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C$$

en donde  $C$  es una constante cualquiera.

En la tabla A-5 se relacionan algunas fórmulas integrales importantes. Pueden encontrarse unas listas más extensas de fórmulas de derivadas e integrales en manuales como el de Herbert Dwight, «*Tables of Integrals and Other Mathematical Data*», 4ª edición, Macmillan Publishing Company, Inc., Nueva York, 1961.

Tabla A-5 Fórmulas de integración†

1. $\int A dt = At$	5. $\int e^{bt} dt = \frac{1}{b} e^{bt}$
2. $\int At dt = \frac{1}{2}At^2$	6. $\int \cos \omega t dt = \frac{1}{\omega} \sin \omega t$
3. $\int At^n dt = A \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad n \neq -1$	7. $\int \sin \omega t dt = -\frac{1}{\omega} \cos \omega t$
4. $\int At^{-1} dt = A \ln t$	

† En estas fórmulas,  $A$ ,  $b$  y  $\omega$  son constantes. A todos los segundos miembros de estas ecuaciones puede sumárseles una constante arbitraria  $C$ .

## Apéndice B

### Unidades SI

Unidades básicas	
Longitud	El <i>metro</i> (m) es la distancia recorrida por la luz en el vacío en $1/299\,792\,458$ s
Tiempo	El <i>segundo</i> (s) es la duración de $9\,192\,631\,770$ períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo $^{133}\text{Cs}$
Masa	El <i>kilogramo</i> (kg) es la masa del cuerpo considerado como patrón internacional que se conserva en Sèvres, Francia
Corriente	El <i>amperio</i> (A) es la corriente que al circular por dos conductores rectilíneos muy largos y paralelos separados 1 m entre sí da origen a una fuerza magnética por unidad de longitud de $2 \times 10^{-7}$ N/m
Temperatura	El <i>kelvin</i> (K) es $1/273,16$ de la temperatura termodinámica del punto triple del agua
Intensidad luminosa	La <i>candela</i> (cd) es la intensidad luminosa, en la dirección perpendicular, de la superficie de $1/600\,000$ m <sup>2</sup> de un cuerpo negro a la temperatura de congelación del platino a la presión de 1 atm

Unidades derivadas		
Fuerza	newton (N)	$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2$
Trabajo, energía	joule (J)	$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$
Potencia	vatio (W)	$1 \text{ W} = 1 \text{ J} / \text{s}$
Frecuencia	hertz (Hz)	$1 \text{ Hz} = \text{s}^{-1}$
Carga	culombio (C)	$1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$
Potencial	voltio (V)	$1 \text{ V} = 1 \text{ J} / \text{C}$
Resistencia	ohmio ( $\Omega$ )	$1 \Omega = 1 \text{ V} / \text{A}$
Capacidad	faradio (F)	$1 \text{ F} = 1 \text{ C} / \text{V}$
Campo magnético	tesla (T)	$1 \text{ T} = 1 \text{ N} / \text{A} \cdot \text{m}$
Flujo magnético	weber (Wb)	$1 \text{ Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2$
Inductancia	henry (H)	$1 \text{ H} = 1 \text{ J} / \text{A}^2$



## Apéndice C

### Datos numéricos

Datos terrestres	
Aceleración de la gravedad $g$	9,80665 m/s <sup>2</sup>
Valor estándar	32,1740 pies/s <sup>2</sup>
A nivel del mar, en el ecuador†	9,7804 m/s <sup>2</sup>
A nivel del mar, en los polos†	9,8322 m/s <sup>2</sup>
Masa de la Tierra, $M_T$	$5,98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra $R_T$ , medio	$6,37 \times 10^6$ m
	3960 millas
Velocidad de escape $\sqrt{2R_T g}$	$1,12 \times 10^4$ m/s
	6,95 millas/s
Constante solar‡	1,35 kW/m <sup>2</sup>
Temperatura y presión normales (C.N.):	
Temperatura	273,15 K
Presión	101,325 kPa
	1,00 atm
Peso molecular del aire	28,97 g/mol
Densidad del aire (C.N.), $\rho_{\text{aire}}$	1,293 kg/m <sup>3</sup>
Velocidad del sonido (C.N.)	331 m/s
Calor de fusión del H <sub>2</sub> O (0°C, 1 atm)	333,5 kJ/kg
Calor de vaporización del H <sub>2</sub> O (100°C, 1 atm)	2,257 MJ/kg

† Medida respecto a la superficie de la Tierra.

‡ Potencia media incidente normalmente sobre 1 m<sup>2</sup> en el exterior de la atmósfera terrestre y a la distancia media de la Tierra al Sol.

Datos astronómicos	
Tierra	
Distancia a la Luna†	$3,844 \times 10^8$ m
	$2,389 \times 10^5$ millas
Distancia al Sol, media†	$1,496 \times 10^{11}$ m
	$9,30 \times 10^7$ millas
	1,00 AU
Velocidad orbital, media	$2,98 \times 10^4$ m/s
Luna	
Masa	$7,35 \times 10^{22}$ kg
Radio	$1,738 \times 10^6$ m
Período	27,32 d
Aceleración de la gravedad en su superficie	1,62 m/s <sup>2</sup>
Sol	
Masa	$1,99 \times 10^{30}$ kg
Radio	$6,96 \times 10^8$ m

† De centro a centro.

Constantes físicas		
Constante de la gravitación	$G$	$6,672\ 6 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$
Velocidad de la luz	$c$	$2,997\ 924\ 58 \times 10^8\ \text{m/s}$
Carga del electrón	$e$	$1,602\ 177 \times 10^{19}\ \text{C}$
Número de Avogadro	$N_A$	$6,022\ 137 \times 10^{23}\ \text{partículas/mol}$
Constante de los gases	$R$	$8,314\ 51\ \text{J/mol}\cdot\text{K}$
		$1,987\ 22\ \text{cal/mol}\cdot\text{K}$
		$8,205\ 78 \times 10^{-2}\ \text{L}\cdot\text{atm/mol}\cdot\text{K}$
Constante de Boltzmann	$k=R/N_A$	$1,380\ 658 \times 10^{-23}\ \text{J/K}$ $8,617\ 385 \times 10^{-5}\ \text{eV/K}$
Unidad de masa unificada	$u=(1/N_A)g$	$1,660\ 540 \times 10^{-24}\ \text{g}$
Constante de Coulomb	$k=1/4\pi\epsilon_0$	$8,987\ 551\ 788 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0$	$8,854\ 187\ 817 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$
Permeabilidad del espacio libre	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}\ \text{N/A}^2$
		$1,256\ 637 \times 10^{-6}\ \text{N/A}^2$
Constante de Planck	$h$	$6,626\ 076 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$
		$4,135\ 669 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}$
		$\hbar = h/2\pi$
		$1,054\ 573 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$ $6,582\ 122 \times 10^{-16}\ \text{eV}\cdot\text{s}$
Masa del electrón	$m_e$	$9,109\ 390 \times 10^{-31}\ \text{kg}$ $510,999\ 1\ \text{keV}/c^2$
Masa del protón	$m_p$	$1,672\ 623 \times 10^{-27}\ \text{kg}$ $938,272\ 3\ \text{MeV}/c^2$
Masa del neutrón	$m_n$	$1,674\ 929 \times 10^{-27}\ \text{kg}$ $939,565\ 6\ \text{MeV}/c^2$
Magnetón de Bohr	$m_B = e\hbar/2m_e$	$9,274\ 015\ 4 \times 10^{-24}\ \text{J/T}$
		$5,788\ 382\ 63 \times 10^{-5}\ \text{eV/T}$
Magnetón nuclear	$m_n = e\hbar/2m_p$	$5,050\ 786\ 6 \times 10^{-27}\ \text{J/T}$
		$3,152\ 451\ 66 \times 10^{-8}\ \text{eV/T}$
Cuanto de flujo magnético	$\phi_0 = h/2e$	$2,067\ 834\ 6 \times 10^{-15}\ \text{T}\cdot\text{m}^2$
Resistencia Hall cuantizada	$R_K = h/e^2$	$2,581\ 280\ 7 \times 10^4\ \Omega$
Constante de Rydberg	$R_H$	$1,097\ 373\ 153\ 4 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$
Cociente frecuencia-tensión Josephson	$2e/h$	$4,835\ 979 \times 10^{14}\ \text{Hz/V}$
Longitud de onda Compton	$\lambda_C = h/m_e c$	$2,426\ 310\ 58 \times 10^{-12}\ \text{m}$

Para datos adicionales ver las contraportadas y las tablas siguientes en el texto.

- Tabla 18-1 Algunos campo eléctricos en la naturaleza, pág. 608
- Tabla 21-1 Constantes dieléctricas y rigidez de diversos materiales, pág. 697
- Tabla 22-1 Resistividades y coeficientes de temperatura, pág. 722
- Tabla 22-2 Diámetros de los hilos y áreas de sus secciones rectas para los hilos de cobre comúnmente utilizados, pág. 722
- Tabla 27-1 Susceptibilidad magnética de diversos materiales a 20 °C, pág. 881
- Tabla 27-2 Valores máximo de  $\mu_r M$  y de  $K_m$  Para diversos materiales ferromagnéticos, pág. 889
- Tabla 29-1 Espectro electromagnético, pág. 958
- Tabla 30-1 Índices de refracción para la luz amarilla del sodio ( $\lambda = 589 \text{ nm}$ ), pág. 991
- Tabla 34-1 Energías en reposo de algunas partículas elementales y núcleos ligeros, pág. 1130
- Tabla 35-1 Fechas aproximadas de algunos experimentos y teorías importantes, 1881-1932, pág. 1146

# Apéndice D

## Factores de conversión

Los factores de conversión se escriben en forma de ecuaciones para mayor sencillez. Las relaciones marcadas con un asterisco son exactas.

### Longitud

- 1 km = 0,6215 millas
- 1 milla = 1,609 km
- 1 m = 1,0936 yd = 3,281 pies = 39,37 pulgadas
- \*1 pulgada = 2,54 cm
- \*1 pie = 12 pulgadas = 30,48 cm
- \*1 yd = 3 pie = 91,44 cm
- 1 año-luz = 1 c · a =  $9,461 \times 10^{15}$  m
- \*1 Å = 0,1 nm

### Área

- \*1 m<sup>2</sup> = 10<sup>4</sup> cm<sup>2</sup>
- 1 km<sup>2</sup> = 0,3861 mi<sup>2</sup> = 247,1 acres
- \*1 pulg<sup>2</sup> = 6,4516 cm<sup>2</sup>
- 1 pie<sup>2</sup> =  $9,29 \times 10^{-2}$  m<sup>2</sup>
- 1 m<sup>2</sup> = 10,76 pie<sup>2</sup>
- \*1 acre = 43 560 pie<sup>2</sup>
- 1 milla<sup>2</sup> = 640 acres = 2,590 km<sup>2</sup>

### Volumen

- \*1 m<sup>3</sup> = 10<sup>6</sup> cm<sup>3</sup>
- \*1 L = 1000 cm<sup>3</sup> = 10<sup>-3</sup> m<sup>3</sup>
- 1 gal = 3,786 L
- 1 gal = 4 qt = 8 pt = 128 oz = 231 pulg<sup>3</sup>
- 1 pulg<sup>3</sup> = 16,39 cm<sup>3</sup>
- 1 pie<sup>3</sup> = 1728 pulg<sup>3</sup> = 28,32 L =  $2,832 \times 10^4$  cm<sup>3</sup>

### Tiempo

- \*1 h = 60 min = 3,6 ks
- \*1 d = 24 h = 1440 min = 86,4 ks
- 1 a = 365,24 d = 31,56 Ms

### Velocidad

- 1 km/h = 0,2778 m/s = 0,6215 milla/h
- 1 milla/h = 0,4470 m/s = 1,609 km/h
- 1 milla/h = 1,467 pie/s

### Ángulo y velocidad angular

- \*π rad = 180°
- 1 rad = 57,30°
- 1° =  $1,745 \times 10^{-2}$  rad
- 1 rev/min = 0,1047 rad/s
- 1 rad/s = 9,549 rev/min

### Masa

- \*1 kg = 1000 g
- \*1 tonelada = 1000 kg = 1 Mg
- 1 u =  $1,6606 \times 10^{-27}$  kg
- 1 kg =  $6,022 \times 10^{23}$  u
- 1 slug = 14,59 kg
- 1 kg =  $6,852 \times 10^{-2}$  slug
- 1 u = 931,50 MeV/c<sup>2</sup>

### Densidad

- \*1 g/cm<sup>3</sup> = 1000 kg/m<sup>3</sup> = 1 kg/L
- (1 g/cm<sup>3</sup>)g = 62,4 lb/pie<sup>3</sup>

### Fuerza

- 1 N = 0,2248 lb = 10<sup>5</sup> dina
- 1 lb = 4,4482 N
- (1 kg)g = 2,2046 lb

### Presión

- \*1 Pa = 1 N/m<sup>2</sup>
- \*1 atm = 101,325 kPa = 1,01325 bars



$$1 \text{ atm} = 14,7 \text{ lb/pulg}^2 = 760 \text{ mmHg}$$

$$= 29,9 \text{ pulgHg} = 33,8 \text{ pieH}_2\text{O}$$

$$1 \text{ lb/pulg}^2 = 6,895 \text{ kPa}$$

$$1 \text{ torr} = 1 \text{ mmHg} = 133,32 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ bar} = 100 \text{ kPa}$$

**Energía**

$$*1 \text{ kW}\cdot\text{h} = 3,6 \text{ MJ}$$

$$*1 \text{ cal} = 4,1840 \text{ J}$$

$$1 \text{ pie}\cdot\text{lb} = 1,356 \text{ J} = 1,286 \times 10^{-3} \text{ Btu}$$

$$*1 \text{ L}\cdot\text{atm} = 101,325 \text{ J}$$

$$1 \text{ L}\cdot\text{atm} = 24,217 \text{ cal}$$

$$1 \text{ Btu} = 778 \text{ pie}\cdot\text{lb} = 252 \text{ cal} = 1054,35 \text{ J}$$

$$1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ u}\cdot\text{c}^2 = 931,50 \text{ MeV}$$

$$*1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$$

**Potencia**

$$1 \text{ caballo de vapor} = 550 \text{ pie}\cdot\text{lb/s} = 745,7$$

W

$$1 \text{ Btu/min} = 17,58 \text{ W}$$

$$1 \text{ W} = 1,341 \times 10^{-3} \text{ 1 caballo de vapor}$$

$$= 0,7376 \text{ pie}\cdot\text{lb/s}$$

**Campo magnético**

$$*1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$$

$$*1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$$

**Conductividad térmica**

$$1 \text{ W/m}\cdot\text{K} = 6,938 \text{ Btu}\cdot\text{pulg/h}\cdot\text{pie}^2 \cdot ^\circ\text{F}$$

$$1 \text{ Btu}\cdot\text{pulg}^2/\text{h}\cdot\text{pie}^2 \cdot ^\circ\text{F} = 0,1441 \text{ W/m}\cdot\text{K}$$

# Apéndice E Tabla Periódica

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1 H 1,00797	2 He 4,003	3 Li 6,941	4 Be 9,012	5 B 10,81	6 C 12,011	7 N 14,007	8 O 15,9994	9 F 19,00	10 Ne 20,179								
11 Na 22,990	12 Mg 23,41	13 Al 26,98	14 Si 28,09	15 P 30,974	16 S 32,064	17 Cl 35,453	18 Ar 39,948										
19 K 39,102	20 Ca 40,08	21 Sc 44,96	22 Ti 47,88	23 V 50,94	24 Cr 52,00	25 Mn 54,94	26 Fe 55,85	27 Co 58,93	28 Ni 58,69	29 Cu 63,55	30 Zn 65,38	31 Ga 69,72	32 Ge 72,59	33 As 74,92	34 Se 78,96	35 Br 79,90	36 Kr 83,80
37 Rb 85,47	38 Sr 87,62	39 Y 88,906	40 Zr 91,22	41 Nb 92,91	42 Mo 95,94	43 Tc (98)	44 Ru 101,1	45 Rh 102,905	46 Pd 106,4	47 Ag 107,870	48 Cd 112,41	49 In 114,82	50 Sn 118,69	51 Sb 121,75	52 Te 127,60	53 I 126,90	54 Xe 131,29
55 Cs 132,905	56 Ba 137,33	57-71 Tierras raras 89-103	72 Hf 178,49	73 Ta 180,95	74 W 183,85	75 Re 186,2	76 Os 190,2	77 Ir 192,2	78 Pt 195,09	79 Au 196,97	80 Hg 200,59	81 Tl 204,37	82 Pb 207,19	83 Bi 208,98	84 Po (210)	85 At (210)	86 Rn (222)
87 Fr (223)	88 Ra (226)	Actínidos	89-103 Actínidos	104 Rf (261)	105 Ha (260)	106 Ts (263)	107 Og (262)	108 Lr (265)	109 Uu (266)	110 Uub (267)	111 Uut (268)	112 Uuq (269)	113 Uuq (270)	114 Uuq (271)	115 Uuq (272)	116 Uuq (273)	117 Uuq (274)

Tierras raras (Lantánidos)  
Actínidos

La designación del grupo 1-18 ha sido recomendada por la Unión Internacional de Química Pura y Aplicada (IUPAC).

Números atómicos y masas atómicas

Actinio	Ac	89	227,03	Lawrencio	Lr	103	(260)
Aluminio	Al	13	26,98	Litio	Li	3	6,941
Americio	Am	95	(243)	Lutecio	Lu	71	174,97
Antimonio	Sb	51	121,75	Magnesio	Mg	12	24,31
Argón	Ar	18	39,948	Manganeso	Mn	25	54,94
Arsénico	As	33	74,92	Mendelevio	Md	101	(258)
Astato	At	85	(210)	Mercurio	Hg	80	200,59
Azufre	S	16	32,064	Molibdeno	Mo	42	95,94
Bario	Ba	56	137,3	Neodimio	Nd	60	144,24
Berilio	Be	4	9,012	Neón	Ne	10	20,179
Berkelio	Bk	97	(247)	Neptunio	Np	93	237,05
Bismuto	Bi	83	208,98	Niobio	Nb	41	92,91
Boro	B	5	10,81	Níquel	Ni	28	58,69
Bromo	Br	35	79,90	Nitrógeno	N	7	14,007
Cadmio	Cd	48	112,41	Nobelio	No	102	(259)
Calcio	Ca	20	40,08	Oro	Au	79	196,97
Californio	Cf	98	(251)	Osmio	Os	76	190,2
Carbón	C	6	12,011	Oxígeno	O	8	15,9994
Cerio	Ce	58	140,12	Paladio	Pd	46	106,4
Cesio	Cs	55	132,905	Plata	Ag	47	107,870
Cinc	Zn	30	65,38	Platino	Pt	78	195,09
Circonio	Zr	40	91,22	Plomo	Pb	82	207,19
Cloro	Cl	17	35,453	Plutonio	Pu	94	(244)
Cobalto	Co	27	58,93	Polonio	Po	84	(210)
Cobre	Cu	29	63,55	Potasio	K	19	39,102
Cromo	Cr	24	52,00	Praseodimio	Pr	59	140,91
Curio	Cm	96	(247)	Prometio	Pm	61	(147)
Disproσιο	Dy	66	162,50	Protactinio	Pa	91	231,04
Einstenio	Es	99	(252)	Radio	Ra	88	(226)
Erbio	Er	68	167,26	Radón	Rn	86	(222)
Escandio	Sc	21	44,96	Renio	Re	75	186,2
Estaño	Sn	50	118,69	Rodio	Rh	45	102,905
Estroncio	Sr	38	87,62	Rubidio	Rb	37	85,47
Eurospio	Eu	63	152,00	Rutenio	Ru	44	101,1
Fermio	Fm	100	(257)	Rutherfordio	Rf	104	(261)
Flúor	F	9	19,00	Samario	Sm	62	150,36
Fósforo	P	15	30,974	Selenio	Se	34	78,96
Francio	Fr	87	(223)	Silicio	Si	14	28,09
Gadolinio	Gd	64	157,25	Sodio	Na	11	22,990
Galio	Ga	31	69,72	Talio	Tl	81	204,37
Germanio	Ge	32	72,59	Tántalo	Ta	73	180,95
Hafnio	Hf	72	178,49	Tecnecio	Tc	43	(98)
Hadnio	Ha	105	(260)	Telurio	Te	52	127,60
Helio	He	2	4,003	Terbio	Tb	65	158,92
Hidrógeno	H	1	1,00797	Titanio	Ti	22	47,88
Hierro	Fe	26	55,85	Torio	Th	90	232,04
Holmio	Ho	67	164,93	Tulio	Tm	69	168,93
Indio	In	49	114,82	Uranio	U	92	238,03
Iridio	Ir	77	192,2	Vanadio	V	23	50,94
Iterbio	Yb	70	173,04	Volframio	W	74	183,85
Itrio	Y	39	88,906	Xenón	Xe	54	131,29
Kriptón	Kr	36	83,80	Yodo	I	53	126,90
Lantano	La	57	138,91				



## Origen de las ilustraciones

### Comienzo de cada parte

Parte 4 pág. XIX, 596-597 © 1988 Richard Megna/Fundamental Photos.

Parte 5 pág. XXII, 972-973 Courtesy AT and T Archives.

Parte 6 pág. XXIII, 1098-1099 Courtesy AT and T Archives.

### Capítulo 18

Inicio pág. 598 Lawrence Berkeley Laboratory Science Photo Library/Photo Researchers; **Figura 18-1** *PSSC Physics*, 2da, ed., 1965. D.C. Heath & Co. y Education Development Center, Inc., Newton, Massachusetts; pág. 600 (*arriba*) Por cortesía del National Institute of Standards and Technology; (*margen*) Bruce Terris/IBM Almaden Research Center; pág. 603 (*arriba izquierda*) © Grant Heilman; (*arriba derecha*) Ann Ronan Picture Library; (*margen*) Burndy Library, Norwalk, Connecticut; **Figura 18-16 (b)** Harold M. Waage; **Figura 18-17 (b)** Harold M. Waage; **Figura 18-18 (b)** Harold M. Waage; pág. 615 Por cortesía de Hulon Forrester/Video Display Corporation, Tucker, Georgia; **Figura 18-25** Por cortesía de Tripos-Evans y Sutherland Corporation.

### Capítulo 19

Inicio pág. 624 © Dagmar Hailer-Hamann/Peter Arnold, Inc.; **Figura 19-4 (b)** Ben Damsky Electric Power Research Institute; **Figura 19-22 (b)** Runk Schoenberger from Grant Heilman; pág. 645 Harold M. Waage.

### Capítulo 20

Inicio pág. 656 © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; pág. 659 © Mark Antman The Image Works; **Figura 20-19 (b)** © Karen R. Preuss; (c) © Hank Morgan Rainbow; pág. 678 (a) Stanford Linear Accelerator Center Science Photo Library/Photo Researchers; (b) © 1986 Wetmore/Photo Researchers; **Figura 20-20 (a)** Harold M. Waage; pág. 683 Por cortesía de Ohio Company; pág. 684 Por cortesía de Xerox Corporation.

### Capítulo 21

Inicio pág. 690 Por cortesía de Tusonix, Tucson, Arizona; **Figura 21-2 (b)** Harold M. Waage; pág. 693 © Mark Antman The Image Works; pág. 697 (a,b) © Bruce Iverson; (c) © Manfred Kage/Peter Arnold, Inc.; pág. 700 © Lawrence Livermore National Laboratory; pág. 703 (a) © Picturepoint Ltd., London; (b) © Paul Brierly; (c) © Lenman Connell The Stock Market; (d) © Robert Essel The Stock Market; pág. 707 Por cortesía de Lockheed Corporation.

### Capítulo 22

Inicio pág. 716 © Rabbit System, Santa Monica, California. Photo caption by kind cooperation of Larry Albright; pág. 719 Por cortesía de Sandia National Laboratories; pág. 723 © Chris Rogers The Stock Market; pág. 724 Por cortesía de AT&T Archives; pág. 726 (a) © 1985 Bob O'Shaughnessy The Stock Market; (b) Por cortesía de EG&G Wakefield; (c) Por cortesía de Liquid Crystal Applications, Inc.; **Figura 22-11** © Paul Siverman/Fundamental Photographs; pág. 730 (a) © *Popular Science*, Junio 1990; (b) Paul Brierly; (c) © Coco McCoy Rainbow; (f) Ann Ronan Picture Library; pág. 735 Donald Calabrese Rome Air Development Center, Crittiss AFB, New York; pág. 740 **Figura 1 (b)** Carolina Biological Supply Company; pág. 743 **Figura 6 (d)** y (*derecha*) © Lennart Nilsson.

### Capítulo 23

Inicio pág. 749 Por cortesía de AT&T Archives; pág. 766 UPI The Bettmann Archive; pág. 767 (a,b) Por cortesía de Central Scientific Company; pág. 770 (a) © Lennart Nilsson; (b) © Bruce Iverson; pág. 771 (c) Por cortesía de Sandia National Laboratories; (d) © Joel E. Arem; (e) © Lennart Nilsson; (f) Por cortesía de Omega Engineering, Inc.

### Capítulo 24

Inicio pág. 781 © Stadler GmbH, Por cortesía de Transrapid International, Munich; **Figura 24-1** Fred Weiss; **Figura 24-8 (b)** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; pág. 788 (a) Larry Langrill; (b) © Lawrence Berkeley Laboratory Science Photo Library; **Figura 24-10 (b)** Carl E. Nielsen; pág. 790 (a) © N.A.S.A. (74-HC-260); (b) Por cortesía de NRAO/AUI; **Figura 24-14 (b)** Por cortesía de Cavendish Laboratory, University of Cambridge; pág. 793 Por cortesía de Central Scientific Company; **Figura 24-16 (b)** © Stepehn Cohen, Rockefeller University; pág. 796 (a) © 1980 Smithsonian Institution; (b) Por cortesía de Scanditronix Inc., Essex, Massachusetts.

### Capítulo 25

Inicio pág. 811 Bob Williamson, Oakland University, Rochester, Michigan; pág. 815 (a,b) © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **Figura 25-8** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **Figura 25-11 (b)** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; pág. 820 (a,b) © Bruce Iverson; pág. 821 (a) Por cortesía de CERN; (b) Por cortesía de Brookhaven National



Laboratory; **Figura 25-15 (b)** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **pág. 825** Por cortesía de F.W. Bell Co.; **Figura 25- 20** Clarence Bennett, Oakland University, Rochester, Michigan; **pág. 830 (a,b)** Por cortesía de Princeton University Plasma Physics Laboratory.

#### Capítulo 26

**Inicio** **pág. 840** © Bruce Iverson; **Figura 26-1** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **pág. 843** Por cortesía de National Portrait Gallery, London; **pág. 855** Sun Yihons, **China Reconstructs**, octubre, 1985; **pág. 856 (a,c)** Por cortesía del U.S. Dept. of the Interior, Dept. of Reclamation; **(b)** © Lee Langum/Photo Researchers; **Figura 26-25 (b)** © Michael Holford, Collection of the Science Museum, London; **pág. 859 (abajo)** Clarence Bennett, Oakland University, Rochester, Michigan; **pág. 866 (abajo izquierda)** Y. Yoshida; **Figura 1** Prof. Neal Brown, Geophysical Institute, University of Alaska, Fairbanks; **Figura 2 (a)** N.A.S.A. (85-HC-148); **Figura 3** **pág. 867** Por cortesía del Prof. Syun-Ichi Akasofu; **Figura 2 (b)** Por cortesía del Prof. Lou Frank, University of Iowa.

#### Capítulo 27

**Inicio** **pág. 878** Robert J. Celotta, National Institute of Standards and Technology; **pág. 885** J. F. Allen, St. Andrews University, Scotland; **pág. 886** © Paul Silverman/Fundamental Photographs; **pág. 887 (a)** © Akira Tonomura, Hitachi Advanced Research Laboratory, Hatoyama, Japan; **(b,c)** © Bruce Iverson; **pág. 889 (a)** © Seagate Technologies; **(b)** John Mamin, IBM Almaden Research Center; **pág. 891** © Bill Pierce Time.

#### Capítulo 28

**Inicio** **pág. 898** © 1990.C.J. Allen/New England Hydro Transmission Corporation; **pág. 906 (a)** Por cortesía de Intel Corporation; **(b)** Por cortesía de Sperry Corporation; **pág. 916** © George A. Clark Radioana Collection-Archive Center, National Museum of American History; **pág. 920 (a)** Por cortesía de Champion Spark Plug Co; **(b)** © Bruce Iverson; **pág. 921 (a)** © Yoav/Phototake; **(b)** © Daniel S. Brody Stock, Boston; **pág. 923** Lana Berkovich; **pág. 925 (a)** Photo by Jolin Petit/Por cortesía de J.W. Petit, The Vestal Press Ltd.; **(b)** © Bruce Iverson; **pág. 926** Por cortesía del Dr. H.H. Busta, Amoco Research Center, Naperville, Illinois; **Figura 6**, **pág. 932 (a-d)** © Lloyd Wolf; **Figura 7**, **pág. 933** © Bruce Iverson.

#### Capítulo 29

**Inicio** **pág. 943** N.A.S.A. (70-HC-220); **pág. 948** © Doug Johnson SP4 Science Source; **pág. 952** NOAA-N.A.S.A./JPL; **pág. 955** Dave Cooke, University of Chicago; **pág. 956 (a)** Por cortesía de AT&T Archives; **(b)** Hale Observatories; **pág. 959 (a)** © 1984 Frank Zullo; **(b)** © Galen Powell/Peter Arnold, Inc.; **pág. 962 (izquierda)** Alistair Steyn-Ross, University of Waikato, New Zealand/Por cortesía de *The Physics Teacher*; **(derecha)** Por cortesía de Brookhaven National Laboratory; **pág. 967** Por cortesía de Cavendish Laboratory, University of Cambridge; **Figura 29-13** Por cortesía de Central Scientific Company.

#### Capítulo 30

**Inicio** **pág. 974** Robert Greenler; **pág. 976 (a)** Por cortesía de Optical Coating Laboratory, Inc. (OCLI); **(b)** © Chuck G'Rear/West Light; **pág. 977 (c)** © William James Warren/West Light; **(d,e)** © Chuck G'Rear/West Light; **pág. 980 (a)** M.A. Duguay y A.T. Mattick, Bell Telephone

Laboratories, Murray Hill, New Jersey; **(b)** © 1989 Anglo-Australian Telescope Board; **Figura 30- 8 (a)** Por cortesía de Battelle-Northwest Laboratories; **(b)** © 1987 Ken Kay/Fundamental Photographs; **Figura 30-10 (b)** © 1987 Pete Saloutos The Stock Market; **pág. 984 (a)** Por cortesía de *Audio Magazine*; **(b)** Demetrios Zangos, with kind cooperation of Photographic Sciences Corporation, Webster, New York; **(c)** © Leonard Lessin/Peter Arnold, Inc.; **(d)** Por cortesía de University of Miami, Music Engineering; **(e)** Por cortesía de Digital Instruments, Santa Barbara, California; **Figura 30-13 (b)** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **Figura 30-16** *PSSC Physics*, 2da ed., 1965. D.C. Heath & Co. y Education Development Center, Inc., Newton, Massachusetts; **Figura 30-17 (b)** © 1987 Ken kay/Fundamental Photographs; **Figura 30-19 (b)** © 1987 Ken kay/Fundamental Photographs; **pág. 989 (a)** © Lawrence Manning/West Light; **(b)** © Dan Boyd/Por cortesía de Naval Research Laboratory; **Figura 30-20 (b)** Por cortesía de AT&T Archives; **(c)** © 1983 C. Falco/Photo Researchers; **Figura 30-21 (c)** © Robert Greenler; **Figura 30-23 (b)** © Paul Silverman/Fundamental Photographs; **pág. 994 (a)** © Robert Greenler; **(b)** © Giovanni DeAmici; **Figura 30-35 (a,b)** Larry Langrill; **pág. 999 (a,b)** Glen A. Izett, U.S. Geological Survey, Denver, Colorado; **(c,d)** Dr. Anthony J. Gow, Cold Regions Research and Engineering Laboratory, Hanover, New Hampshire; **(e)** © Sepp Seitz/Woodfin Camp and Associates, Inc.; **pág. 1001 (a)** © 1970 Fundamental Photographs; **(b)** © 1990 PAR/NYC, Inc./Photo by Elizabeth Algieri; **pág. 1003** © 1987 Paul Silverman/Fundamental Photographs; **Figura 2** **pág. 1005** Robert Greenler; **Figura 3,4** **pág. 1006** Robert Greenler.

#### Capítulo 31

**Inicio** **pág. 1012** © Dagmar Hailer-Hamann/Peter Arnold, Inc.; **Figura 31-2** Demetrios Zangos; **pág. 1015** © 1982 Jon Brenneis Photo; **Figura 31-12 (c)** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **pág. 1020 (a,b)** A.G.E. FotoStock/ © Peter Arnold, Inc.; **pág. 1021 (a,b)** © 1990 Richard Megna/Fundamental Phtographs; **pág. 1025** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **Figura 31-26 (b)** Nils Abramson; **(d)** © 1974 Fundamental Photographs; **Figura 31-27 (c)** © Fundamental Photographs; **pág. 1032** © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **pág. 1033** © Bohdan Hrynewych Stock, Boston.

#### Capítulo 32

**Inicio** **pág. 1041** Robert Parshall, Biomedical Visualization Laboratories, University of Illinois at Chicago; **pág. 1044 (a,b)** © Lennart Nilsson; **pág. 1045 (c)** © Lennart Nilsson; **(d)** Por cortesía de IMEC y University of Pennsylvania, Dept. of Electrical Engineering; **pág. 1049 (arriba)** Por cortesía de Nikon, Inc.; **(margin)** © Chuck G'Rear/West Light; **Figura 32-8 (a)** © 1983 Jonathan Levine; **pág. 1051 (a)** Cornell University; **(b)** M. Issacson, M. Barshatsky, J. Cline Cornell University; **pág. 1053 (a)** AIP Niels Bohr Library; **(b)** © Royal Astronomical Society Library; **(c)** © Lick Observatory, U.C. Regents; **(d)** Hale Observatories; **(e)** © 1980 Gary Ladd; **pág. 1054 (a,b,d)** © California Association for Research in Astronomy; **(c)** © Ray Ellis/Photo Researchers, Inc.; **pág. 1056 (a)** N.A.S.A. (531-76- 026); **(b)** N.A.S.A. (531-76-0390); **pág. 1057 (c,d,e)** N.A.S.A. (90-HC-508).

#### Capítulo 33

**Inicio** **pág. 1061** © Ken Kay/Fundamental Photographs;

pág. 1063 © 1990 Richard Megna/Fundamental Photographs; **Figura 33-3 (a)** Por cortesía de Bausch & Lomb; **Figura 33-5 (a,b)** Por cortesía de T.A. Wiggins; **pág. 1066 (a,b)** Optical Coating Laboratory, Inc. (OCLI); **Figura 33-7** *PSSC Physics*, 2da ed., 1965. D.C. Heath & Co. and Education Development Center, Newton, Massachusetts; **Figura 33-9 (a)** Por cortesía de Michel Cagnet; **Figura 33-18 (a,b,c)** Por cortesía de Michel Cagnet; **Figura 33-19 (a)** Por cortesía de Michel Cagnet; **Figura 33-27 (a)** Por cortesía de Michel Cagnet; **Figura 33-29 (a,b)** M. Cagnet, M. Françon, J.C. Thierr, *Atlas of Optical Phenomena*, **Figura 30-30 (a)** Por cortesía de Battelle-Northwest Laboratories; **Figura 33-31** Por cortesía de Michel Cagnet; **Figura 33-32** Por cortesía de Michel Cagnet; **Figura 33-34 (a,b)** Por cortesía de Michel Cagnet; **Figura 33-36 (a)** The Bettmann Archive; **(b)** Clarence Bennett, Oakland University, Rochester, Michigan; **(c)** Por cortesía de Holotek Ltd., Rochester, New York; **(d)** NRAO/AUI Science Photo Library; **pág. 1088** Por cortesía de Lawrence Livermore National Laboratory, Laser Program; **pág. 1089 (a)** © Philippe Plailly Science Photo Library; **(b,c)** © Ronald R. Erickson, 1981. Hologram by

Nicklaus Phillips, 1978, for Digital Equipment Corporation; **(d)** © 1983 Ronald R. Erickson; **(e)** © Chuck G'Rear/West Light.

#### Capítulo 34

**Inicio pág. 1100** The Hebrew University of Jerusalem Por cortesía de AIP Niels Bohr Library; **pág. 1101** Por cortesía de NRAO/AUI; **pág. 1126** C. Powell, P. Fowler & D. Perkins Science Photo Library/Photo Researchers; **pág. 1134 (a)** © Michael Freeman; **(b)** N.A.S.A. (76-HC-612); **pág. 1135** © Michael Freeman.

#### Capítulo 35

**Inicio pág. 1145** Adapted from Eastman Kodak and Wabash Instrument Corporation; **pág. 1147** Max Planck Institute, Berlin; **pág. 1151** Por cortesía de Thorn EMI Electron Tubes Ltd.; **Figura 35-7 (b)** Por cortesía de General Electric Company; **Figura 35-10** From G. Herzberg; *Annalen de Physick*, Vol. 84, **pág. 565**, 1927; **Figura 35-17 (a,b)** *PSSC Physics*, 2da ed., 1965. D.C. Heath & Co. y Education Development Center, Newton, Massachusetts; **(c)** © C.G. Shull; **(d)** © Claus Jonsson.