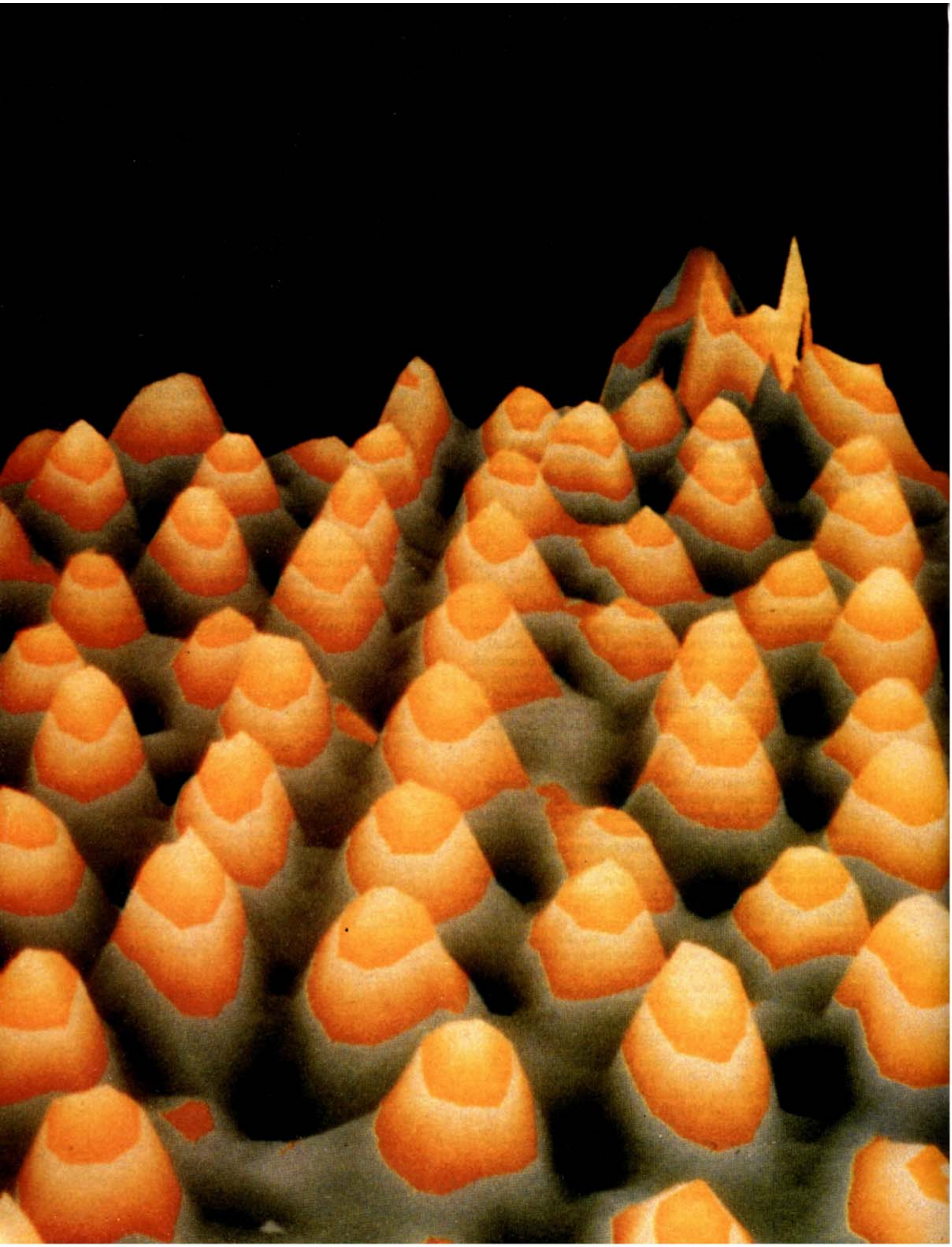


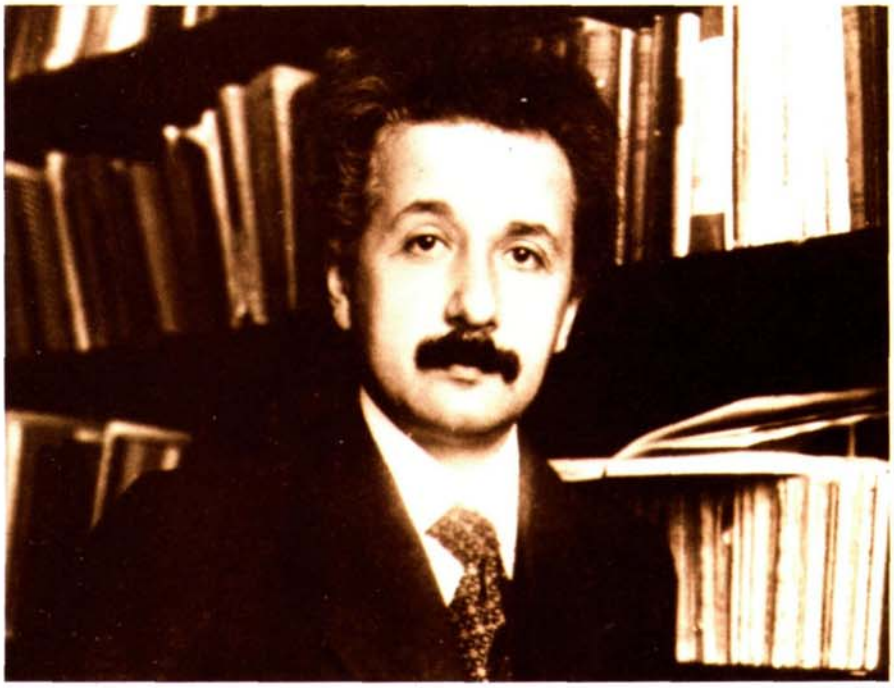
Parte 6

Física Moderna

En esta fotografía se muestra con una amplificación de alrededor de 1 000 000 000 la superficie del silicio, ingrediente importante en muchos dispositivos semiconductores. Los átomos individuales se ven como colinas en esta micrografía, obtenida mediante un modernísimo microscopio de barrido. La información digital reunida por el microscopio se representa mediante un ordenador, que asigna falsos colores para acentuar la estructura cristalina.

Capítulo 34

Relatividad



Albert Einstein en 1916.

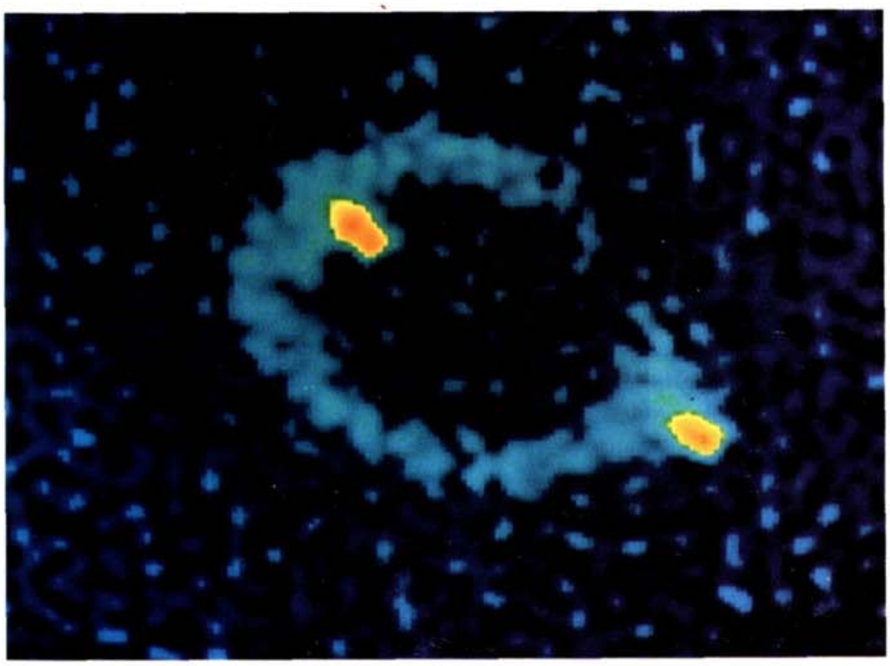
A finales del siglo XIX, muchos físicos pensaban que ya se habían descubierto todas las leyes importantes de la física y que les había quedado poco que hacer, excepto quizás ultimar los detalles restantes. Las leyes de Newton del movimiento y de la gravedad parecían describir todos los movimientos conocidos sobre la Tierra igual que los de los planetas y demás cuerpos celestes, mientras que las ecuaciones de Maxwell de la electricidad y el magnetismo parecían dar una descripción completa de los fenómenos electromagnéticos. Incluso, aunque fueron acumulándose nuevas pruebas acerca del comportamiento de las moléculas y de los átomos, se suponía que estos nuevos fenómenos llegarían a ser adecuadamente descritos por las teorías de Newton y de Maxwell. Sin embargo, el descubrimiento de la radioactividad por Becquerel en 1896, los artículos teóricos de Planck en 1897 y de Einstein en 1905, junto con el trabajo de Rutherford, Millikan, Bohr, De Broglie, Schrödinger, Heisenberg, y otros en los primeros años del siglo XX condujeron a la elaboración de dos teorías completamente nuevas: la relatividad y la mecánica cuántica. Estas teorías revolucionaron el mundo de la ciencia y constituyeron los fundamentos de nuevas tecnologías que han cambiado la faz de nuestra civilización.

En este capítulo estudiaremos la relatividad. La teoría de la relatividad se compone de dos teorías bastante diferentes, la teoría especial y la teoría general.

La primera, desarrollada por Einstein y otros científicos en 1905, se refiere esencialmente a la comparación entre las medidas realizadas en diferentes sistemas de referencia inerciales que se mueven con velocidad constante unos respecto a otros. Sus consecuencias, que pueden deducirse con un mínimo de cálculo matemático, son aplicables en una gran diversidad de situaciones que aparecen en ciencia y en la técnica. Por otra parte, la teoría general, también desarrollada por Einstein y otros investigadores alrededor de 1916, trata con sistemas de referencia acelerados y con la gravedad. Una comprensión completa de la teoría general exige el empleo de matemáticas avanzadas y muy complejas y las aplicaciones de esta teoría se enmarcan principalmente en el área de la gravitación. Tiene una gran importancia en la cosmología, pero se encuentra raramente en otras áreas de la física o de la ingeniería. Por consiguiente, nos dedicaremos a la teoría especial (frecuentemente denominada *relatividad especial*) y únicamente comentaremos brevemente la teoría general en la última sección de este capítulo.

34-1 Relatividad newtoniana

La primera ley de Newton no distingue entre una partícula en reposo y otra que se está moviendo con velocidad constante. Si no existe ninguna fuerza externa neta actuando sobre ella, la partícula permanecerá en su estado inicial—bien en reposo, o moviéndose con su velocidad inicial. Consideremos una partícula en reposo respecto a nosotros sin que actúen fuerzas sobre ella. De acuerdo con la primera ley de Newton, seguirá estando en reposo. A continuación consideremos la misma partícula desde el punto de vista de un segundo observador que se está moviendo con velocidad constante respecto a nosotros. Desde el «sistema de referencia» de este observador, tanto nosotros como la partícula se está moviendo con velocidad constante. La primera ley de Newton también es válida para dicho observador. (Obsérvese que si éste se estuviese acelerando respecto a nosotros, vería cómo la partícula se aceleraba respecto a él sin que actuase ninguna fuerza sobre ella. En consecuencia, la primera ley de Newton no es válida para él.) ¿Cómo podremos distinguir si somos nosotros y la partícula los que estamos en reposo mientras que el segundo observador se mueve con velocidad constante, o es este segundo observador quien permanece en reposo y estamos en movimiento tanto nosotros como la partícula?



Esta estructura en forma de anillo de la radio-fuente MG1131 + 0456 se considera debida a la acción de «lente gravitatoria», propuesta por primera vez por Einstein en 1936, en la que una cierta fuente se transforma en una imagen en forma de anillo debido a un objeto muy grande y de gran masa situado más hacia delante.

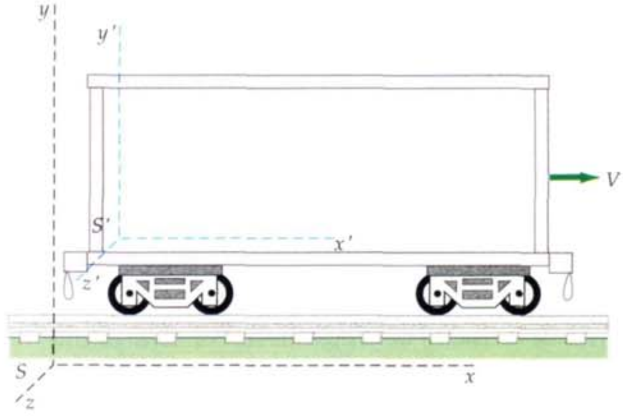


Figura 34-1 Vagón que se está moviendo con velocidad constante a lo largo de una vía rectilínea. El sistema de referencia S' está en reposo respecto al vagón mientras que se mueve con velocidad V en relación a S, que está en reposo respecto a la vía. Es imposible decir mediante la realización de experimentos mecánicos dentro del vagón si es éste el que se está moviendo hacia la derecha con velocidad V o es la vía la que se mueve hacia la izquierda con velocidad V.

Consideremos algunos ejemplos sencillos. Supongamos que se tiene un tren moviéndose sobre una vía recta y horizontal con velocidad constante V. (Supongamos que en el movimiento no existen saltos ni traqueteos.) Escojamos un sistema de coordenadas xyz con el eje x a lo largo de la vía, como se ve en la figura 34-1. No importa qué punto de la vía escogemos como origen. Dentro de las diferentes posibilidades, diferirán las posiciones del tren y sus contenidos (respecto al origen), pero su velocidad será siempre la misma. Un conjunto de sistemas coordenados en reposo relativo entre sí se denomina un **sistema de referencia**. Llamaremos S al sistema de referencia en reposo respecto al sistema de la vía. Pasamos ahora a la realización de diversos experimentos mecánicos en un vagón cerrado del tren. Para todos ellos escogeremos un sistema coordenado en reposo relativo al tren. Este sistema coordenado es un sistema de referencia S', que se está moviendo hacia la derecha con velocidad V relativa al sistema S. Obsérvese que una pelota en reposo en el tren seguirá estando en reposo. Si dejamos caer la pelota, cae en línea recta hacia abajo en el sistema S' con la aceleración debida a la gravedad g. (Como es natural, cuando se observa en el sistema S, la pelota describirá una trayectoria parabólica porque tiene una velocidad inicial V hacia la derecha.) Ningún experimento mecánico que podamos hacer —la medición del período de un péndulo o de un cuerpo sobre un muelle, la observación de la colisión de dos cuerpos, o cualquier otro— nos dirá si el tren se está moviendo y la vía está en reposo, o si es la vía la que se mueve y el tren está en reposo. Las leyes de Newton son válidas tanto para el sistema de referencia S' como para el sistema de referencia S.

Un sistema en que son válidas las leyes de Newton se denomina **sistema de referencia inercial**.

Todos los sitemas de referencia que se mueven con velocidad constante respecto a un sistema de referencia inercial son también sistemas de referencia inerciales.

Si tenemos dos sistemas de referencia inerciales moviéndose con velocidad constante uno respecto al otro, como los sistemas S y S', no existe ningún experimento mecánico que pueda decirnos cuál está en reposo y cuál está en movimiento, o si ambos están moviéndose. Este resultado se conoce como el principio de la **relatividad newtoniana**:

No puede detectarse el movimiento absoluto.

Este principio fue bien conocido por Galileo, Newton, y otros científicos en el siglo XVII. Pero durante el siglo XIX, cambió esta visión del problema. Entonces se pensaba generalmente que la relatividad newtoniana no era válida y que en principio podía detectarse el movimiento absoluto haciendo una medida de la velocidad de la luz.

34-2 El experimento de Michelson-Morley

Durante nuestro estudio del movimiento ondulatorio hemos aprendido que todas las ondas mecánicas necesitan un medio para su propagación y que la velocidad de dichas ondas depende únicamente de las propiedades del medio. Por ejemplo, la velocidad de las ondas sonoras en aire depende de la temperatura de este último. Esta velocidad se refiere al aire en calma. Ciertamente que puede detectarse el movimiento relativo al aire en calma. Si nos movemos respecto al aire en calma, notamos la sensación de viento.

Por consiguiente, era natural esperar que la propagación de la luz y de otras ondas electromagnéticas se realizase en cierto tipo de medio de soporte. El medio que se propuso recibió históricamente el nombre de **éter**, pero resultaba ser un medio con propiedades muy poco corrientes. Por ejemplo, debería tener una gran rigidez para que permitiese la propagación de ondas de velocidades tan elevadas. (Recuérdese que la velocidad de las ondas en una cuerda dependía de la tensión aplicada en ella, y que las ondas sonoras longitudinales en un sólido dependían del módulo de compresibilidad del mismo.) Pero, por otra parte, el éter no podía introducir ningún tipo de fuerza de arrastre o rozamiento en los planetas, ya que su movimiento se explicaba totalmente con el sólo empleo de la ley de la gravitación. Se sospechaba que el éter estaba en reposo relativo respecto a las estrellas lejanas, pero se consideraba que este punto constituía una cuestión abierta. Por tanto, resultaba de considerable interés determinar la velocidad de la Tierra respecto al éter. Albert Michelson emprendió la realización de experimentos para esta determinación, primero en 1881 y luego de nuevo con Edward Morley en 1887 con mayor precisión. Se pensaba que una medición de la velocidad de la luz respecto a cierto sistema de referencia que se moviese a través del éter daría un resultado mayor o menor que c en una cantidad que dependía de la velocidad del sistema en relación con el éter, y de la dirección del movimiento respecto a la dirección del haz de luz. Así pues, en 1881 Michelson decidió medir la velocidad de la luz respecto a la Tierra y a partir de esta medición determinar la velocidad de la Tierra con respecto al éter.

De acuerdo con la teoría de Maxwell del electromagnetismo, la velocidad de la luz y de otras ondas electromagnéticas es

$$c=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}=3\times10^8\ \text{m/s}$$

en donde ϵ_0 y μ_0 son, respectivamente, la permitividad y la permeabilidad del espacio libre o vacío. No hay nada en las ecuaciones de Maxwell que nos diga en qué sistema de referencia tendrá que tener este valor la velocidad de la luz, pero se esperaba que ésta debía ser la velocidad de la luz respecto a su medio natural, el éter.

En las medidas usuales de la velocidad de la luz (sección 30-1), se determinaba el tiempo que empleaba un pulso de luz en ir y volver a un espejo. La figura 34-2 muestra una fuente luminosa y un espejo separados una distancia L. Si suponemos que ambos se están moviendo con velocidad v a través del éter, la teoría clásica predice que la luz viajará hacia el espejo con velocidad $c-v$ y regresará con velocidad $c+v$ (siendo ambas velocidades relativas al espejo y a la fuente luminosa). El tiempo empleado en el recorrido completo sería

$$t_1=\frac{L}{c-v}+\frac{L}{c+v}=2c\,\frac{L}{c^2-v^2}=\frac{2L}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \tag{34-1}$$

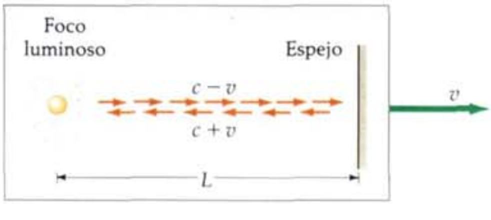


Figura 34-2 Foco luminoso y espejo moviéndose con velocidad v respecto al «éter». De acuerdo con la teoría clásica, la velocidad de la luz respecto al foco y al espejo es $c-v$ hacia el espejo y $c+v$ alejándose del espejo.

Podemos ver que este valor difiere del tiempo $2L/c$ en el factor $(1-v^2/c^2)^{-1}$, que es casi igual a 1 si v es mucho menor que c. Podemos simplificar esta expresión para valores pequeños de v/c utilizando el desarrollo del binomio

$$(1+x)^n = 1+nx+n(n-1)\frac{x^2}{2}+\ldots \simeq 1+nx \qquad 34\text{-}2$$

cuando x es mucho menor que 1. Si hacemos $n=-1$ y $x=v^2/c^2$, la ecuación 34-1 se convierte en

$$t_1 \simeq \frac{2L}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad 34\text{-}3$$

La velocidad orbital de la Tierra alrededor del Sol es próxima a 3×10^4 m/s. Si tomamos este valor como una estimación de v, tendremos $v=3\times10^4$ m/s, $v/c=(3\times10^4 \text{ m/s})/(3\times10^8 \text{ m/s})=10^{-4}$, y $v^2/c^2=10^{-8}$. Así pues, la corrección debida al movimiento de la Tierra es ciertamente pequeña.

Michelson se dio cuenta de que, aunque este efecto es demasiado pequeño como para poder medirlo directamente, sería posible medir v^2/c^2 mediante una determinación de diferencias. Para ello, utilizó el interferómetro de Michelson, estudiado en la sección 33-3. En el experimento en cuestión un haz de luz se mueve a lo largo de la dirección del movimiento de la Tierra y otro se mueve perpendicularmente a esta dirección (figura 34-3). La diferencia entre los tiempos que emplean ambos haces en realizar un recorrido completo de ida y vuelta depende de la velocidad de la Tierra y puede determinarse con una medida interferencial. Supongamos que el interferómetro está orientado de forma tal que el haz que incide sobre el espejo M_1 tiene la dirección del supuesto movimiento de la Tierra. La ecuación 34-3 nos da entonces el resultado clásico correspondiente al tiempo t_1 del viaje completo correspondiente al haz transmitido. El haz que se refleja en el divisor del haz e incide sobre el espejo M_2 se mueve con una cierta velocidad **u** (relativa a la Tierra) perpendicular al movimiento de la Tierra. Respecto al éter, viaja con velocidad **c** como se indica en la figura 34-4. La velocidad **u** (de acuerdo con la teoría clásica) es entonces la diferencia vectorial $\mathbf{u}=\mathbf{c}-\mathbf{v}$, como se ve en la misma figura. El módulo o valor de **u** es $\sqrt{c^2-v^2}$, de modo que el tiempo que emplea este haz en el viaje de ida y vuelta completo t_2 es

$$t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2L}{c}(1-v^2/c^2)^{-1/2} \qquad 34\text{-}4$$

Utilizando de nuevo el desarrollo del binomio, se obtiene

$$t_2 \simeq \frac{2L}{c}\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad 34\text{-}5$$

Esta expresión es ligeramente diferente de la dada para t_1 en la ecuación 34-3.

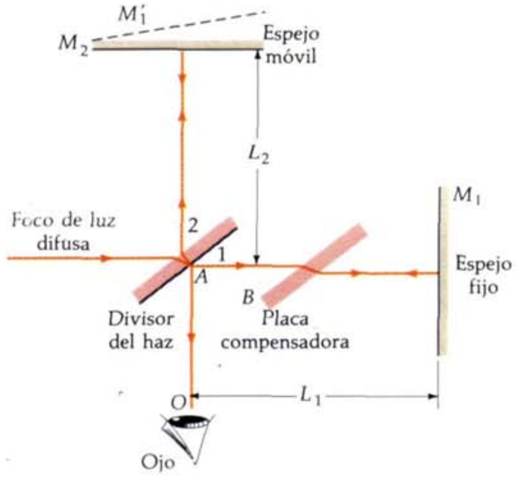


Figura 34-3 Interferómetro de Michelson. La línea a trazos M'_1 es la imagen del espejo M_1 en el espejo A. Las franjas de interferencia formadas son las originadas por una pequeña película de aire en forma de cuña que se origina entre las fuentes M_2 y M'_1. Admitir que el haz de luz que se refleja en el espejo M_1 es paralelo al movimiento de la Tierra, y el que se refleja en el espejo M_2 es perpendicular a dicho movimiento. La interferencia entre los dos haces depende del número relativo de ondas que hay en cada trayecto, lo que a su vez depende de la velocidad de los haces luminosos respecto a la Tierra. Si la velocidad de la luz a lo largo del trayecto paralelo es diferente de la que marcha a lo largo del trayecto perpendicular, el diagrama de franjas de interferencia se desplazará cuando se haga rotar 90° al interferómetro.

La diferencia entre estos dos tiempos es

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{L}{c}\,\frac{v^2}{c^2} \qquad 34\text{-}6$$

Esta diferencia de tiempo ha de detectarse mediante la observación de la interferencia entre ambos haces luminosos.

Debido a la dificultad de hacer que los dos caminos sean de la misma longitud con la precisión requerida, se observaba el diagrama de interferencia de los dos haces y luego se giraba el aparato completo 90°. La rotación produce una diferencia de tiempos dada por la ecuación 34-6 para cada haz. La diferencia total de tiempos de $2\,\Delta t$ da como resultado una diferencia de fase de $\Delta\phi$ entre los dos haces, en donde

$$\Delta\phi = 2\pi\,\frac{2c\,\Delta t}{\lambda}$$

y λ es la longitud de onda de la luz. Por tanto, las franjas de interferencia observadas en la primera orientación deberían desplazarse en un número de franjas ΔN dado por

$$\Delta N = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{2c\,\Delta t}{\lambda} = \frac{2L}{\lambda}\,\frac{v^2}{c^2} \qquad 34\text{-}7$$

En el primer intento realizado por Michelson en 1881, L medía unos 1,2 m y λ era 590 nm. Para $v^2/c^2 = 10^{-8}$ se esperaba que ΔN sería 0,04 franjas. Sin embargo, no se observó ningún desplazamiento. En el caso de la Tierra ocurría como si exactamente estuviese en reposo respecto al éter en el momento en que se realizó el experimento. Éste se repitió seis meses después, cuando el movimiento de la Tierra respecto al Sol tenía sentido opuesto al anterior. Aunque los errores e incertidumbres experimentales se estimaron que debían ser del mismo orden que el propio desplazamiento de las franjas esperado, Michelson indicó que la observación de carencia de desplazamiento en las franjas constituía una prueba de que la Tierra no se movía en relación con el éter. En 1887, cuando repitió el experimento con Edward W. Morley, utilizó un sistema mejorado para hacer girar el aparato sin introducir ningún desplazamiento de franjas debido a deformaciones mecánicas, y aumentó la longitud L del trayecto efectivo de la luz a unos 11 m mediante una serie de reflexiones múltiples. La figura 34-5 muestra la configuración del aparato de Michelson-Morley. En este intento se esperaba que ΔN sería de 0,4 franjas, de 20 a 40 veces mayor que el valor mínimo que podía observarse. Pero, una vez más, no se observó ningún desplazamiento. Desde entonces se ha repetido el experimento en diversas condiciones por diferentes científicos, pero nunca se ha encontrado ningún desplazamiento.

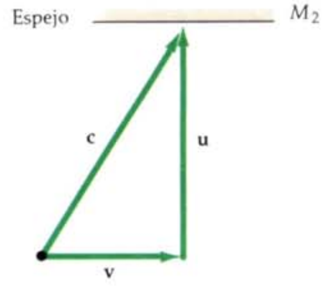


Figura 34-4 Un haz de luz reflejado desde la placa divisora en un interferómetro de Michelson. El interferómetro se mueve hacia la derecha con respecto al éter con una velocidad **v**, y el haz de luz se mueve perpendicularmente hacia el espejo M_2 con la velocidad **u**. La velocidad de la luz es **c** en el sistema del éter. Respecto a la Tierra, en donde el interferómetro está fijo, la velocidad de la luz es **u** = **c** − **v**. Por tanto, según la teoría clásica, la velocidad de la luz respecto a la Tierra es $u = (c^2 - v^2)^{1/2} = c(1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

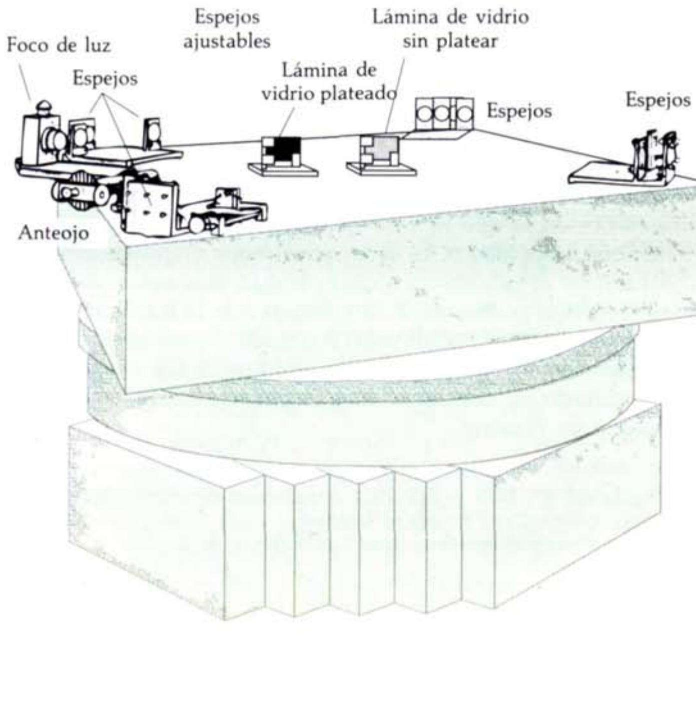


Figura 34-5 Dibujo del aparato de Michelson-Morley utilizado en su experimento en 1887. Los instrumentos ópticos se montaron sobre una losa de arenisca de 1,5 m de lado, que flotaba en mercurio, reduciéndose por tanto las deformaciones y vibraciones que habían afectado a los experimentos anteriores. Haciendo girar el aparato en el plano horizontal podían hacerse observaciones en todas direcciones.

En 1905, a la edad de 26 años, Albert Einstein publicó un artículo sobre la electrodinámica de los cuerpos móviles*. En este artículo, postulaba que el movimiento absoluto no podría detectarse por ningún experimento. (Estudiaremos con detalle los postulados de Einstein en la próxima sección.) Por tanto, era de esperar el resultado nulo del experimento de Michelson-Morely. Podemos considerar tanto el aparato como la Tierra en reposo. Así pues, no era de esperar ningún desplazamiento de franjas al girar 90° el aparato puesto que todas las direcciones son equivalentes. Einstein no pretendía explicar los resultados del experimento de Michelson-Morley. Su teoría nació de sus propias consideraciones de los fundamentos de la electricidad y del magnetismo y de la inusual propiedad de las ondas electromagnéticas de propagarse en el vacío. En su primer artículo, que contiene la teoría completa de la relatividad especial, sólo hizo de pasada una referencia al experimento de Michelson-Morley y en años posteriores no pudo recordar si conocía los detalles de este experimento antes de que publicase su teoría.

34-3 Postulados de Einstein

La teoría de la relatividad especial puede deducirse de dos postulados propuestos por Einstein en su artículo original del año 1905. Enunciados de forma simple, estos postulados dicen

Postulados de Einstein

Postulado 1. No puede detectarse el movimiento absoluto, uniforme.

Postulado 2. La velocidad de la luz es independiente del movimiento de la fuente.

El postulado 1 es simplemente una extensión del principio newtoniano de relatividad para incluir todos los tipos de mediciones físicas (no sólo aquellas que fueran mecánicas). El postulado 2 describe una propiedad común a todas las ondas. Por ejemplo, la velocidad de las ondas sonoras no depende del movimiento de la fuente sonora. Cuando un coche que se acerca hace sonar su bocina, la frecuencia que se oye aumenta de acuerdo con el efecto doppler estudiado en la sección 14-6, pero la velocidad de las ondas que se mueven en el aire no depende de la velocidad del coche. La velocidad de las ondas depende únicamente de las propiedades del aire, como su temperatura, por ejemplo.

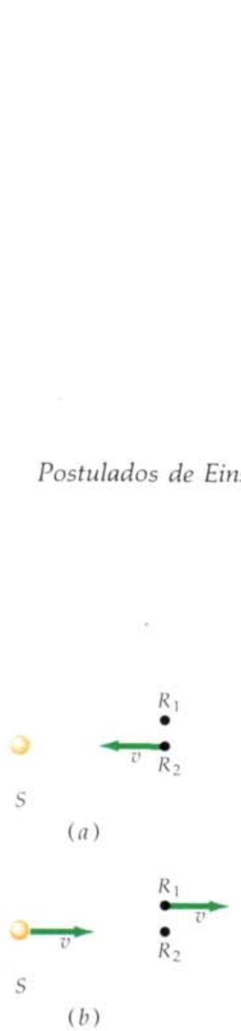


Figura 34-6 (a) Foco luminoso estacionario S y observador estacionario R_1, con un segundo observador R_2 moviéndose hacia el foco con velocidad v. (b) En el sistema de referencia en el que está en reposo el observador R_2, el foco luminoso S y el observador R_1 se mueven hacia la derecha con velocidad v. Si no puede detectarse el movimiento absoluto, los dos puntos de vista son equivalentes. Como la velocidad de la luz no depende del movimiento de la fuente, el observador R_2 mide el mismo valor para dicha velocidad que el observador R_1.

Aunque ambos postulados parecen muy razonables, muchas de sus implicaciones comunes resultan sorprendentes y contradicen a lo que normalmente denominamos sentido común. Por ejemplo, una importante implicación de estos postulados es que todo observador mide el mismo valor para la velocidad de la luz con independencia del movimiento relativo del foco y del observador. Consideremos un foco luminoso S y dos observadores, R_1 en reposo relativo a S y R_2 moviéndose hacia S con velocidad v, como se indica en la figura 34-6a. La velocidad de la luz medida por R_1 es $c=3\times10^8$ m/s. ¿Cuál es la velocidad que mide R_2? La respuesta es *no* $c+v$. Según el postulado 1, la figura 34-6a es equivalente a la figura 34-6b, en la que R_2 está en reposo y tanto el foco S como R_1 se están moviendo con velocidad v. Es decir, puesto que no puede detectarse el movimiento absoluto, no es posible decir quién se está moviendo realmente y quién está en reposo. Según el postulado 2, la velocidad de la luz de una fuente móvil es independiente del movimiento de ésta. Así pues, examinando la figura 34-6b, vemos que R_2 mide como valor de la velocidad de la luz exactamente c, igual que R_1. Este resultado se considera con frecuencia como una alternativa al segundo postulado de Einstein:

* *Annalen der Physik*, vol. 17, 1905, p. 841. Para la traducción del original alemán ver W. Perrett y G.B. Jeffery (traducción), *The Principle of Relativity: A collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity* por H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, y W. Weyl, Dover, Neyork, 1923.

Postulado 2 (Alternativa). Todo observador mide el mismo valor c para la velocidad de la luz.

Este resultado contradice nuestras ideas intuitivas acerca de las velocidades relativas. Si un coche se mueve a 50 km/h alejándose de un observador, y otro coche se mueve a 80 km/h en la misma dirección y sentido, la velocidad del segundo coche respecto al primero es de 30 km/h. Este resultado se mide fácilmente y se encuentra conforme a nuestra intuición. Sin embargo, de acuerdo con los postulados de Einstein, si un haz de luz se está moviendo en la misma dirección y sentido que los coches, los observadores situados en ellos medirán la misma velocidad para el haz luminoso. Nuestras ideas intuitivas acerca de la combinación de velocidades, son aproximaciones que sólo son válidas cuando las velocidades son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Incluso en un avión que se esté moviendo con la velocidad del sonido, no es posible medir la velocidad de la luz con suficiente exactitud como para distinguir la diferencia entre los resultados c y $c+v$, siendo v la velocidad del avión. Con objeto de poder hallar dicha diferencia deberíamos, o bien movernos con una velocidad muy grande (mucho mayor que la del sonido), o hacer unas mediciones extremadamente exactas, como en el experimento de Michelson-Morley.

34-4 La transformación de Lorentz

Los postulados de Einstein tienen importantes consecuencias cuando se quieren medir intervalos de tiempo y de espacio, o bien velocidades relativas. A través de todo este capítulo estaremos comparando mediciones de las posiciones y los tiempos de ciertos sucesos (como destellos luminosos) hechas por observadores que se están moviendo unos respecto a otros. Utilizaremos un sistema de coordenadas rectangulares xyz con origen O, denominado sistema de referencia S, y otro sistema $x'y'z'$ con origen O', denominado el sistema S', que se está moviendo con una velocidad constante $\mathbf{V}$ respecto al sistema S. Entonces, respecto a S', el sistema S se está moviendo con velocidad constante $-\mathbf{V}$. Por sencillez, consideremos que el sistema S' se está moviendo con velocidad de módulo V a lo largo del eje x en su sentido positivo respecto a S. Entonces, respecto a S', el sistema S se mueve con velocidad V sobre el eje x' en el sentido negativo del mismo. En cada uno de los sistemas, supondremos que existen tantos observadores como sean necesarios y que están equipados con dispositivos de medida, como relojes y reglas, que son idénticos cuando se comparan entre sí en reposo (ver figura 34-7).

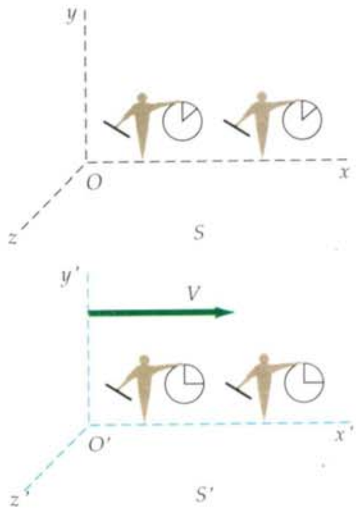


Figura 34-7 Sistemas coordenados de referencia S y S' moviéndose con velocidad relativa V. En ambos sistemas existen observadores con reglas y relojes que son idénticos cuando se comparan en reposo.

Necesitamos muchos observadores, por ejemplo, para determinar los tiempos en que ocurren los sucesos. Si un observador está distante de un suceso, entonces su tiempo observado puede verse alterado por el tiempo que emplea la información sobre dicho suceso en llegar hasta su posición (como el tiempo de recorrido de los pulsos de luz). El observador puede evitar estos problemas registrando únicamente sucesos *locales* para él y dejando que se ocupen de los demás sucesos a aquellos observadores que están en los lugares adecuados. Es como tener un juez o árbitro al principio de una pista de carreras y otro al final de la misma.

Utilizaremos los postulados de Einstein para encontrar la relación general entre las coordenadas x, y y z y el tiempo t de un suceso visto en el sistema de referencia S y las coordenadas x', y' y z' y el tiempo t' del mismo suceso visto en el sistema de referencia S', que se está moviendo con velocidad relativa uniforme respecto a S. Consideraremos únicamente el caso simple en que los orígenes están coincidiendo en el instante $t=t'=0$. La relación clásica, denominada **transformación de Galileo**, es

$$x=x'+Vt' \quad y=y' \quad z=z' \quad t=t' \qquad \text{34-8}a$$

Transformación de Galileo

La transformación inversa es

$$x'=x-Vt \quad y'=y \quad z'=z \quad t'=t \qquad \text{34-8}b$$

Estas ecuaciones son consistentes con las observaciones experimentales en tanto que V sea mucho menor que c. De ellas se deduce la ley clásica familiar de suma de velocidades. Si una partícula tiene una velocidad $u_x = dx/dt$ en el sistema S, su velocidad en el sistema S' es

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - V = u_x - V \qquad 34\text{-}9$$

Si derivamos esta ecuación una vez más, encontraremos que la aceleración de la partícula es la misma en ambos sistemas:

$$a_x = du_x/dt = du'_x/dt' = a'_x$$

Debe quedar claro que la transformación galileana no es consistente con los postulados de Einstein de la relatividad especial. Si la luz se mueve a lo largo del eje x con velocidad c en S, estas ecuaciones implican que la velocidad en S' es $u'_x = c - V$, en lugar de ser $u'_x = c$, que es consistente tanto con los postulados de Einstein como con los experimentos. Por consiguiente, las ecuaciones de transformación clásicas deben modificarse para hacerlas consistentes con los postulados de Einstein. Daremos un breve esquema de un método para obtener la transformación relativista.

Supongamos que la ecuación de la transformación relativista para x es la misma que la ecuación clásica (ecuación 34-8*a*) excepto por la presencia de un multiplicador constante en el segundo miembro. Es decir, supondremos que la ecuación tiene la forma

$$x = \gamma(x' + Vt') \qquad 34\text{-}10$$

en donde γ es una constante que puede depender de V y c pero no de las coordenadas. La transformación inversa debe tener el mismo aspecto excepto por el signo de la velocidad:

$$x' = \gamma(x - Vt) \qquad 34\text{-}11$$

Consideremos un pulso luminoso que parte del origen de S en $t = 0$. Como hemos supuesto que los orígenes son coincidentes en $t = t' = 0$, el pulso también parte del origen de S' en $t' = 0$. El postulado de Einstein exige que la ecuación correspondiente al componente x del frente de ondas del pulso de la luz sea $x = ct$ en el sistema S y $x' = ct'$ en el sistema S'. Sustituyendo x por ct y x' por ct' en las ecuaciones 34-10 y 34-11, se tiene

$$ct = \gamma(ct' + Vt') = \gamma(c + V)t' \qquad 34\text{-}12$$

y

$$ct' = \gamma(ct - Vt) = \gamma(c - V)t \qquad 34\text{-}13$$

Podemos eliminar o bien t' o bien t entre estas dos ecuaciones y determinar γ. Se obtiene

$$\gamma^2 = (1 - V^2/c^2)^{-1}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \qquad 34\text{-}14$$

(Es importante observar que γ es siempre mayor que 1 y que cuando V es mucho menor que c, $\gamma \approx 1$.) Por consiguiente, la transformación relativista para x y x' viene dada por las ecuaciones 34-10 y 34-11 estando dado γ por la ecuación 34-14. Podemos obtener ecuaciones para t y t' combinando la ecuación 34-10 con la transformación inversa dada por la ecuación 34-11. Sustituyendo en la ecuación 34-11 x por $x = \gamma\,(x' + Vt')$, se tiene

$$x' = \gamma[\gamma(x' + Vt') - Vt] \qquad 34\text{-}15$$

de donde puede despejarse t en función de x' y t'. La transformación relativista completa es

$$x=\gamma(x'+Vt') \qquad y=y' \qquad z=z' \tag{34-16}$$

$$t=\gamma\left(t'+\frac{Vx'}{c^2}\right) \tag{34-17}$$

Transformación de Lorentz

La inversa es

$$x'=\gamma(x-Vt) \qquad y'=y \qquad z'=z \tag{34-18}$$

$$t'=\gamma\left(t-\frac{Vx}{c^2}\right) \tag{34-19}$$

La transformación descrita por las ecuaciones 34-16 a 34-19 se denomina **transformación de Lorentz**. Relaciona las coordenadas de espacio y tiempo x, y, z y t de un suceso en el sistema S a las coordenadas x', y', z' y t' del mismo suceso visto en el sistema S', que se está moviendo a lo largo del eje x con velocidad V relativa al sistema S.

Examinaremos ahora algunas aplicaciones de la transformación de Lorentz.

Dilatación del tiempo

Una consecuencia importante de los postulados de Einstein y de la transformación de Lorentz es que, el intervalo de tiempo entre dos sucesos que ocurren en el mismo lugar en cierto sistema de referencia, es siempre menor que el intervalo de tiempo existente entre los mismos sucesos, medido en otro sistema de referencia en el que los sucesos se verifican en lugares diferentes. Consideremos dos sucesos que se producen en x'_0 en los instantes t'_1 y t'_2 en el sistema S'. Podemos hallar los tiempos t_1 y t_2 correspondientes a los mismos sucesos en S mediante la ecuación 34-17. Se tiene

$$t_1=\gamma\left(t'_1+\frac{Vx'_0}{c^2}\right)$$

y

$$t_2=\gamma\left(t'_2+\frac{Vx'_0}{c^2}\right)$$

de modo que

$$t_2-t_1=\gamma(t'_2-t'_1)$$

El tiempo transcurrido entre dos sucesos que ocurren en el *mismo lugar* en un sistema de referencia se denomina el **tiempo propio** t_p. En este caso, el intervalo de tiempo $\Delta t_p=t'_2-t'_1$ medido en el sistema S' es el tiempo propio. El intervalo de tiempo Δt medido en cualquier otro sistema de referencia es siempre más largo que el tiempo propio. Este crecimiento se denomina **dilatación del tiempo**:

$$\Delta t=\gamma\,\Delta t_p \tag{34-20}$$

Dilatación del tiempo

Ejemplo 34-1

Dos sucesos ocurren en el mismo punto x'_0 en los instantes t'_1 y t'_2 en el sistema S', que se está moviendo con velocidad V respecto al sistema S. ¿Cuál es la separación espacial de estos sucesos en el sistema S?

Según la ecuación 34-16, tenemos

$$x_1 = \gamma(x'_0 + Vt'_1)$$

y

$$x_2 = \gamma(x'_0 + Vt'_2)$$

Entonces

$$x_2 - x_1 = \gamma V(t'_2 - t'_1)$$
$$= V(t_2 - t_1)$$

La separación espacial de estos sucesos en S es la distancia que un punto simple, tal como el x'_0 en S', se mueve en S durante el intervalo de tiempo que transcurre entre los sucesos.

Podemos comprender la dilatación del tiempo directamente a partir de los postulados de Einstein sin utilizar la transformación de Lorentz. La figura 34-8*a* muestra un observador A' a una distancia D de un espejo. El observador y el espejo están en una nave espacial que está en reposo en el sistema S'. El observador produce un destello y mide el intervalo de tiempo $\Delta t'$ entre el destello original y el momento en que ve el destello que retorna reflejado en el espejo. Como la luz viaja con velocidad c, este tiempo es

$$\Delta t' = \frac{2D}{c}$$

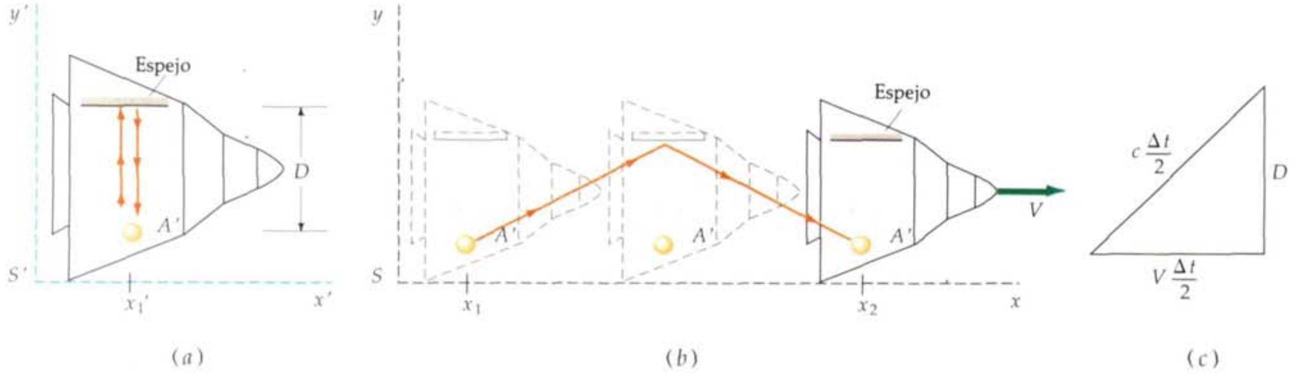
Consideremos a continuación estos mismos dos sucesos, el destello luminoso original y la recepción del destello reflejado, según se observarían en el sistema de referencia S, en el que el observador A' y el espejo se están moviendo hacia la derecha con velocidad V, como se indica en la figura 34-8*b*. Los sucesos se producen en dos lugares diferentes x_1 y x_2 en el sistema S. Durante el intervalo de tiempo Δt (según se mide en S) entre el destello original y el de retorno, el observador A' y su nave espacial han recorrido una distancia horizontal $V\,\Delta t$. En la figura 34-8*b* podemos ver que el trayecto recorrido por la luz es más largo en S que en S'. Sin embargo, según los postulados de Einstein, la luz viaja con la misma velocidad c en el sistema S y en el S'. Como la luz recorre una longitud mayor en S a la misma velocidad, debe emplear más tiempo en llegar al espejo y regresar. El intervalo de tiempo en S es, pues, más largo que en S'. A partir del triángulo de la figura 34-8*c*, se tiene

$$\left(\frac{c\,\Delta t}{2}\right)^2 = D^2 + \left(\frac{V\,\Delta t}{2}\right)^2$$

o bien

$$\Delta t = \frac{2D}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2D}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Figura 34-8 (*a*) El observador A' y el espejo están dentro de una nave espacial en el sistema S'. El tiempo que tarda el destello luminoso en llegar al espejo y regresar, según la medida realizada por A' resulta ser $2\,D/c$. (*b*) En el sistema S, la nave se está moviendo hacia la derecha con velocidad V. Si la velocidad de la luz es la misma en ambos sistemas, el tiempo que tarda la luz en llegar al espejo y regresar es más largo que $2D/c$ en S porque la distancia recorrida es mayor que $2D$. (*c*) Triángulo rectángulo que sirve para calcular el tiempo Δt en el sistema S.



Haciendo uso de $\Delta t' = 2D/c$, se obtiene

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma\, \Delta t'$$

Ejemplo 34-2

Los astronautas de una nave espacial que se aleja de la Tierra a $V=0{,}6c$ interrumpen su conexión con el control espacial, diciendo que van a dormir una siesta de 1 hora y que luego volverán a llamar. ¿Cuál es la duración de su siesta según se mide en la Tierra?

Como los astronautas van a dormir y se despertarán en el mismo lugar en su sistema de referencia, el intervalo de tiempo correspondiente a una siesta de 1 hora medido por ellos mismos es su tiempo propio. En el sistema de referencia de la Tierra, los astronautas se desplazarán una distancia considerable entre ambos sucesos. El intervalo de tiempo medido en el sistema de referencia de la Tierra (utilizando dos relojes situados donde se producen dichos sucesos) es más largo en un factor γ. Con $V=0{,}6c$, tendremos

$$1 - \frac{V^2}{c^2} = 1 - (0{,}6)^2 = 0{,}64$$

Entonces γ vale

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}64}} = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$$

Así pues, la siesta según las medidas terrestres durará 1,25 horas.

Ejercicio

Si la nave espacial del ejemplo 34-2 se está moviendo con $V=0{,}8c$, ¿cuánto durará su siesta de 1 hora, medida desde la Tierra? (Respuesta: 1,67 h)

Contracción de longitudes

Un fenómeno estrechamente relacionado con la dilatación del tiempo es la **contracción de longitudes**. La longitud de un objeto medida en el sistema de referencia en que dicho objeto se encuentra en reposo se denomina su **longitud propia** L_p. En un sistema de referencia en el que el objeto se está moviendo, la longitud medida es más corta que su longitud propia. Consideremos una varilla en reposo en el sistema S' con un extremo en x'_2 y el otro en x'_1. La longitud de la varilla en este sistema es su longitud propia $L_p = x'_2 - x'_1$. Para hallar la longitud de la varilla en el sistema S hay que tener cierto cuidado. En este sistema, la varilla se está moviendo hacia la derecha con velocidad V, que es la velocidad de S'. Se *define* la longitud de la varilla en el sistema S como $L = x_2 - x_1$, en donde x_2 es la posición de un extremo en un cierto instante t_1, y x_1 es la posición del otro extremo *en el mismo instante* $t_1 = t_2$, medidos en el sistema S. Para calcular $x_2 - x_1$ en un cierto instante es conveniente utilizar la ecuación 34-18, porque relaciona x, x' y t, mientras que la ecuación 34-16 no resulta adecuada porque relaciona x, x' y t':

$$x'_2 = \gamma(x_2 - Vt_2)$$

y

$$x'_1 = \gamma(x_1 - Vt_1)$$

Como $t_2 = t_1$, obtenemos

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1)$$

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x'_2 - x'_1) = \sqrt{1 - V^2/c^2}\,(x'_2 - x'_1)$$

o sea

Contracción de longitudes

$$L=\frac{1}{\gamma}\,L_p=\sqrt{1-V^2/c^2}\,L_p \qquad 34\text{-}21$$

La longitud de una varilla es, pues, más corta cuando se mide en un sistema en movimiento. Antes de que se publicase el artículo de Einstein, Lorentz y FitzGerald intentaron explicar el resultado nulo del experimento de Michelson-Morley suponiendo que las distancias en la dirección del movimiento se contraían en la cantidad dada por la ecuación 34-21. Esta contracción se conoce ahora como **contracción de Lorentz-FitzGerald**.

Ejemplo 34-3

Una regla que tiene una longitud de 1 m se mueve en una dirección a lo largo de su longitud con velocidad relativa V respecto a un observador. Éste mide la longitud de la regla y da 0,914 m. ¿Cuál es la velocidad V?

La longitud de la regla medida en un sistema que se está moviendo con velocidad V está relacionada con su longitud propia mediante la ecuación 34-21:

$$L=\frac{L_p}{\gamma}$$

Entonces

$$\gamma=\frac{L_p}{L}=\frac{1\ \text{m}}{0{,}914\ \text{m}}=\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}=1{,}094$$

$$\sqrt{1-V^2/c^2}=0{,}914$$

$$1-\frac{V^2}{c^2}=(0{,}914)^2=0{,}835$$

$$\frac{V^2}{c^2}=1-0{,}835=0{,}165$$

$$V=0{,}406c$$

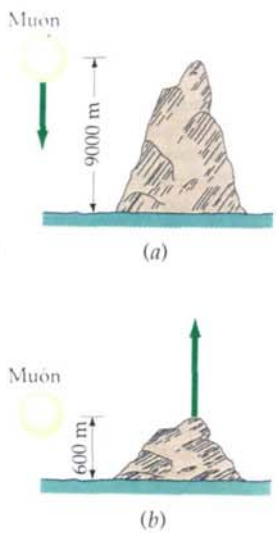


Figura 34-9 Aunque los muones se crean a una gran altura en la atmósfera y su período de vida medio es sólo de unos 2 μs cuando están en reposo, muchos aparecen en la superficie de la Tierra. (*a*) En el sistema de referencia terrestre un muón típico moviéndose a 0,998c tiene un período de vida medio de 30 μs y recorre 9000 m en este tiempo. (*b*) En el sistema de referencia del muón, la distancia recorrida por la Tierra es de sólo 600 m en el período de 2 μs.

Un ejemplo interesante de dilatación del tiempo o de contracción de longitud lo proporciona la aparición de muones como radiación secundaria de los rayos cósmicos. Los muones se desintegran de acuerdo con la ley estadística de la radioactividad:

$$N(t)=N_0\,e^{-t/\tau} \qquad 34\text{-}22$$

en donde N_0 es el número inicial de muones en el instante $t=0$, $N(t)$ es el número que queda en el instante t y τ es el período de vida media, que vale aproximadamente 2 μs en el caso de los muones en reposo. Puesto que los muones se crean (a partir de la desintegración de los piones) a gran altura en la atmósfera, normalmente a varios miles de metros por encima del nivel del mar, pocos de estos muones alcanzarán el nivel del mar. Un muón típico moviéndose con velocidad 0,998c recorrería sólo 600 m aproximadamente en 2 μs. Sin embargo, el período del muón medio en el sistema de referencia terrestre debe incrementarse en el factor $1/\sqrt{1-V^2/c^2}$, que vale 15 para esta velocidad particular. Por tanto, el período medido en el sistema de referencia Tierra es 30 μs, y un muón con una velocidad de 0,998c recorre del orden de 9000 m en este tiempo. Desde el punto de vista del muón, éste vive sólo 2 μs, pero la atmósfera está circulando junto a él a la velocidad de 0,998c. La distancia de 9000 m en el sistema terrestre se encuentra así contraída a sólo 600 m en el sistema del muón, como se indica en la figura 34-9.

Es fácil distinguir experimentalmente entre las predicciones clásica y relativista de las observaciones de los muones al nivel del mar. Supóngase que observamos 10^8 muones a una altitud de 9000 m en un cierto intervalo de tiempo con un detector de muones. ¿Cuántos sería de esperar que se observasen al nivel del mar en el mismo intervalo de tiempo? De acuerdo con la predicción no relativista, el tiempo que tardarán estos muones en recorrer 9000 m es $(9000\text{ m})/0{,}998c \approx 30\ \mu s$, que equivale a 15 períodos. Sustituyendo $N_0 = 10^8$ y $t = 15\ \tau$ en la ecuación 34-22, se obtiene

$$N = 10^8\ e^{-15} = 30{,}6$$

Así pues, sería de esperar que sólo 31 del total original de 100 millones de muones habrían quedado sin desintegrarse al llegar al nivel del mar.

De acuerdo con las predicciones relativistas, la Tierra debería recorrer únicamente la distancia contraída de 600 m en el sistema en reposo del muón. Esto se realiza en sólo $2\ \mu s = 1\ \tau$. Por consiguiente, el número de muones que son de esperar al nivel del mar es

$$N = 10^8\ e^{-1} = 3{,}68 \times 10^7$$

Así pues, la relatividad predice que se deberán observar 36,8 millones de muones en el mismo intervalo de tiempo. Experimentos de este tipo han confirmado las predicciones relativistas.

Cuestión

1. Un observador está de pie en una esquina y un amigo suyo pasa conduciendo un automóvil por delante de él. Ambos anotan los tiempos en que el coche pasa por dos cruces de calles diferentes. Cada uno de ellos determina en su reloj las lecturas de tiempo que transcurren entre ambos sucesos. ¿Cuál de ellos ha determinado el intervalo de tiempo propio?

34-5 Sincronización de relojes y simultaneidad

Vimos en la sección 34-4 que el tiempo propio es el intervalo de tiempo entre dos sucesos que se producen en el mismo punto en un cierto sistema de referencia. Por tanto, puede medirse con un solo reloj. Sin embargo, en otro sistema de referencia que se mueve con respecto al primero, los dos mismos sucesos ocurren en lugares diferentes, de modo que se necesitan dos relojes para registrar los tiempos. El tiempo o instante de cada suceso se mide con un reloj diferente y el intervalo se halla mediante resta. Este procedimiento exige que ambos relojes estén **sincronizados**. Demostraremos en esta sección que

Dos relojes sincronizados en un sistema de referencia no están sincronizados en ningún otro sistema que se mueva respecto al primero.

Un corolario de este resultado es que

Dos sucesos que son simultáneos en un sistema de referencia no lo son en otro sistema que se mueva respecto al primero.

(Esto es cierto a no ser que los sucesos y los relojes estén en el mismo plano perpendicular al movimiento relativo). La comprensión de estos hechos normalmente resuelve todas las paradojas de la relatividad. Desgraciadamente, la creencia intuitiva (e incorrecta) de que la simultaneidad es una relación absoluta, es difícil de eliminar.

Supóngase que tenemos dos relojes en reposo en los puntos A y B separados entre sí una distancia L en el sistema S. ¿Cómo podemos sincronizar estos dos relojes? Si un observador en A mira el reloj situado en B y hace que su reloj marque el mismo tiempo, los relojes no estarán sincronizados debido al tiempo L/c que tarda la luz en recorrer el espacio que separa un reloj de otro. Para sincronizar los relojes, el observador en A debe hacer que su reloj adelante en el tiempo L/c. Entonces verá que el reloj en B marca un tiempo que es L/c detrás del correspondiente a su reloj, pero calculará que los relojes están sincronizados cuando tenga en cuenta el tiempo L/c que la luz tarda en llegar hasta él. Todos los observadores, excepto aquellos que están a mitad del camino entre ambos relojes, verán que éstos marcan tiempos diferentes, pero también podrán calcular que los relojes están sincronizados cuando corrijan el tiempo que tarda la luz en llegar hasta ellos. Un método equivalente para la sincronización de dos relojes consistiría en que un tercer observador en C a mitad del camino entre los dos relojes enviara una señal luminosa hacia los observadores A y B de modo que éstos dispusieran sus relojes marcando una hora ya preestablecida al recibir la señal.

Examinemos ahora la cuestión de la **simultaneidad**. Supongamos que A y B se ponen de acuerdo para hacer explotar bombas en el instante t_0 (habiendo sincronizado previamente sus relojes). El observador C verá la luz procedente de las dos explosiones en el mismo momento, y puesto que está equidistante de A y B, llegará a la conclusión de que las explosiones son simultáneas. Otros observadores en S verán la luz procedente desde A o desde B primero, dependiendo de su posición, pero después de corregir el tiempo que la luz emplea en llegar hasta ellos, también llegarán a la conclusión de que las explosiones eran simultáneas. Así pues, definiremos que:

Dos sucesos en un sistema de referencia son simultáneos si las señales luminosas procedentes de los sucesos alcanzan en el mismo instante a un observador situado a mitad de camino entre ellos.

Para demostrar que dos sucesos que son simultáneos en el sistema S no lo son en otros sistemas S' moviéndose con movimiento relativo respecto a S, utilizaremos un ejemplo presentado por Einstein. Un tren se está moviendo con velocidad V y pasa por delante del andén de una estación. Tenemos unos observadores A', B' y C' en la parte delantera, trasera y mitad del tren. Supongamos ahora que caen sobre el tren y el andén unos rayos en la parte delantera y trasera del tren y que los relámpagos son simultáneos en el sistema del andén (S) (figura 34-10). Es decir, un observador C en un punto intermedio entre las posiciones A y B en donde caen los rayos, observa los dos destellos en el mismo momento. Es conveniente suponer que los rayos producen unas quemaduras en el tren y en el andén de modo que los sucesos pueden fácilmente localizarse en cada sistema de referencia. Puesto que C' está en el punto medio del tren, a mitad de camino entre los lugares en que se han producido las quemaduras, los sucesos pueden ser simultáneos en S' sólo si C' ve los destellos en el mismo instante. Sin embargo, C' ve el destello procedente de la parte delantera del tren antes que el destello que viene de la parte trasera. Podemos comprender este hecho considerando el movimiento de C' según se ve desde el sistema S (figura 34-11). En el instante en que la luz procedente del destello delantero alcanza a C', éste se ha movido una cierta distancia acercándose hacia el destello delantero mientras que se ha alejado otra cierta distancia del destello trasero. Así pues, la luz procedente del destello trasero aún no ha alcanzado a C', como se indica en la figura. Por consiguiente, el observador C' debe llegar a la conclusión de que los sucesos no son simultáneos y que el rayo cayó en la parte delantera antes que otro cayese en la trasera. Además, todos los observadores en S' sobre el tren estarán de acuerdo con C' cuando hayan corregido sus lecturas en el tiempo que tarda la luz en llegar a ellos.

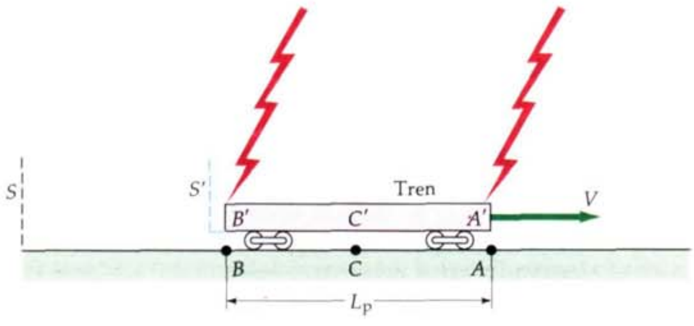


Figura 34-10 Dos rayos caen simultáneamente en los extremos de un tren moviéndose con velocidad V en el sistema S unido al andén. La luz procedente de estos sucesos simultáneos alcanza al observador C situado en el punto medio entre ambos al mismo tiempo. La distancia entre los relámpagos es $L_{p,\text{andén}}$.

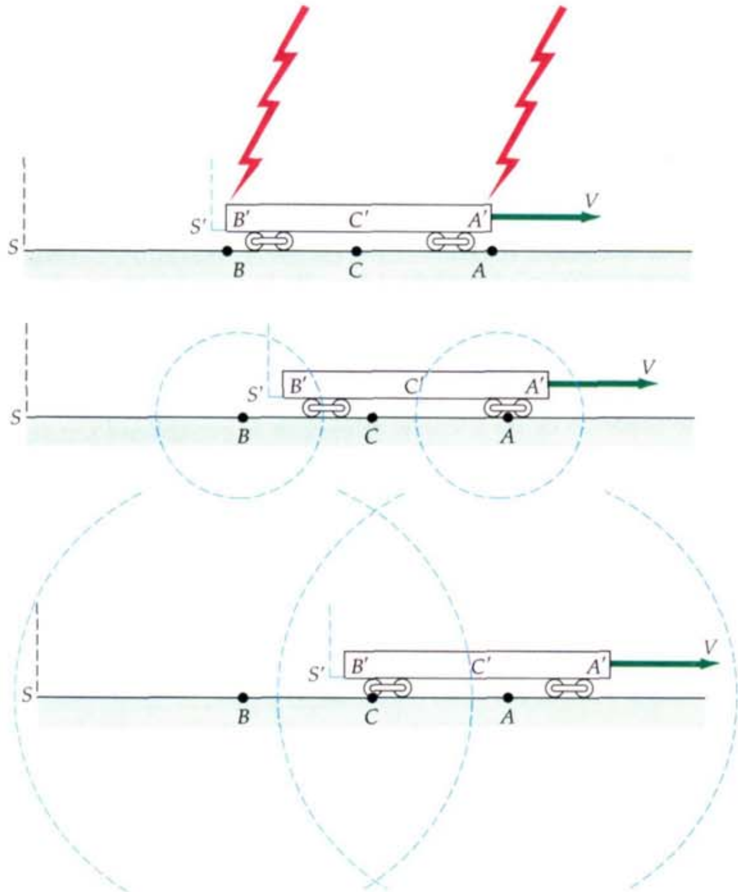
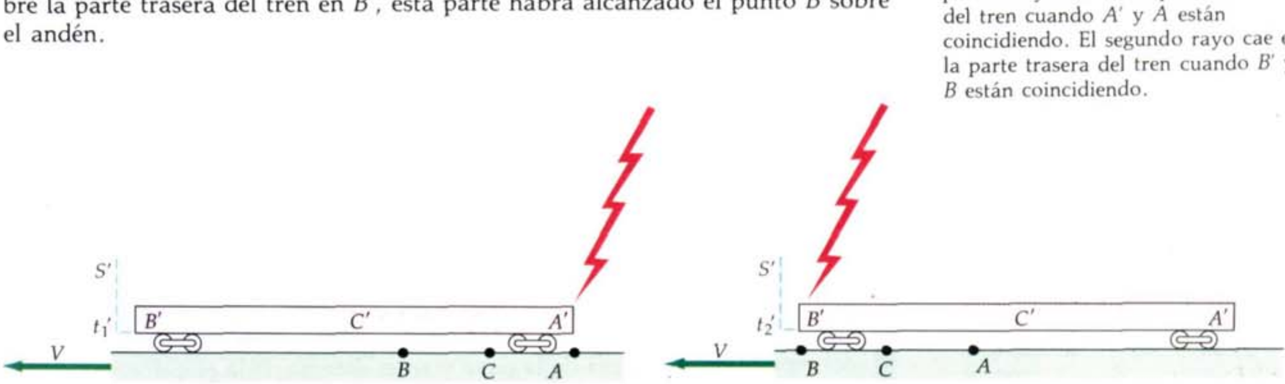


Figura 34-11 En el sistema S la luz procedente del rayo en la parte delantera del tren alcanza al observador C' en el punto medio del tren antes que la luz procedente del rayo en la parte trasera del tren debido a que éste se mueve. Como C' está en el punto medio entre los sucesos (que se produce en la parte delantera y trasera del tren), estos sucesos no son para él simultáneos.

Sea $L_{\text{p,tren}}$, la longitud propia del tren, es decir, su longitud cuando se mide en S' en el que está en reposo. Además, sea $L_{\text{p,andén}}$, la longidud propia del andén, es decir, la distancia entre las quemaduras según se ven desde S. Puesto que las marcas de quemaduras en el andén coinciden con la parte delantera y trasera del tren en el instante (en S) en que cayeron los rayos, la distancia entre las quemaduras $L_{\text{p,andén}}$ es igual a la longitud del tren L_T según se mide en el sistema S en el que se está moviendo. Esta longitud es menor que la longitud propia del tren debido a la contracción de longitudes; es decir, $L_T = L_{\text{p,andén}} < L_{\text{p,tren}}$.

En la figura 34-12 vemos los sucesos de las caídas de los rayos según se ven en el sistema de referencia del tren (S') en el que el tren está en reposo y el andén se está moviendo. En este sistema, la distancia entre las quemaduras en el andén se ha contraído, de modo que ésta es más corta que en S, y el tren está en reposo, de modo que el tren no es más largo que lo que es en S. Cuando el rayo cae sobre la parte delantera del tren en A', dicha parte delantera está en A, y su parte trasera todavía no ha alcanzado el punto B. Posteriormente, cuando el rayo caiga sobre la parte trasera del tren en B', esta parte habrá alcanzado el punto B sobre el andén.

Figura 34-12 Los rayos de la figura 34-10 vistos desde el sistema S' del tren. En este sistema, la distancia entre A y B sobre el andén es menor que $L_{\text{p,andén}}$ y la longitud propia del tren $L_{\text{p,tren}}$ es más larga que $L_{\text{p,andén}}$. El primer rayo cae en la parte delantera del tren cuando A' y A están coincidiendo. El segundo rayo cae en la parte trasera del tren cuando B' y B están coincidiendo.



En el sistema de referencia S, los rayos inciden en A y B simultáneamente. Supongamos que existen relojes en el andén en A y B que están sincronizados en el sistema S. Desde el punto de vista del sistema S' unido al tren, los relojes y el andén se están moviendo y pasando al tren. Un rayo incide primero en la parte delantera del tren, que está en el punto A, y un cierto tiempo después, otro rayo cae sobre la parte trasera del tren que está ahora en B. Así pues, los relojes móviles no están sincronizados si se ven desde el sistema S'. Si el reloj en A marca las 12:00 del mediodía cuando el rayo cae en A, el reloj en B deberá marcar un cierto tiempo anterior a las 12:00 del mediodía en ese instante. El reloj en B marca las 12:00 del mediodía posteriormente cuando coincide con la parte trasera del tren, y el rayo cae en B. Otro modo de decir esto mismo es que el reloj en A adelanta al reloj en B según se ve en S'. En el sistema S', llamaremos al reloj en A el reloj «cazador» porque en este sistema los dos relojes se están moviendo en el sentido negativo de las x' con el reloj A en x_2 persiguiendo, o cazando, al reloj B en x_1.

La discrepancia entre los tiempos de los dos relojes que están sincronizados en el sistema S según se ven en el sistema S' puede hallarse a partir de las ecuaciones de transformación de Lorentz. Supóngase que tenemos relojes en los puntos x_1 y x_2 que están sincronizados en S. ¿Cuáles son los tiempos t_1 y t_2 en estos relojes cuando se observan desde el sistema S' en el instante t'_0? Según la ecuación 34-19, tenemos

$$t'_0=\gamma\left(t_1-\frac{Vx_1}{c^2}\right)$$

y

$$t'_0=\gamma\left(t_2-\frac{Vx_2}{c^2}\right)$$

Entonces

$$t_2-t_1=\frac{V}{c^2}(x_2-x_1) \qquad 34\text{-}23$$

Obsérvese que el reloj cazador (en x_2) adelanta al otro (en x_1) en una cantidad que es proporcional a su separación propia $x_2 - x_1$.

Si dos relojes se sincronizan en el sistema en el que están en reposo, estarán fuera de sincronismo en otro sistema cualquiera. En el sistema en el que se están moviendo, el reloj «cazador» adelanta (muestra un tiempo posterior) en una cantidad

$$\Delta t_s=L_p\frac{V}{c^2}$$

en donde L_p es la distancia propia entre los relojes.

Un ejemplo numérico ayudará a una comprensión más clara de la dilatación del tiempo, la sincronización de los relojes y la consistencia interna de estos resultados.

Ejemplo 34-4

Un observador situado en una nave espacial tiene un cañón láser y un espejo (como en nuestro ejemplo de la dilatación del tiempo de la figura 34-8). La distancia del cañón al espejo es de 15 minutos de luz (escrito 15 $c\cdot$min) y la nave se mueve con una velocidad $V=0{,}8c$. La nave va recorriendo una plataforma espacial muy larga que tiene dos relojes sincronizados, uno en la posición de la nave en el momento que el observador dispara el cañón láser y el otro en la posición de la nave que ocupa cuando la luz retorna al cañón después de reflejarse en el espejo. Hallar los intervalos de tiempo transcurridos entre los sucesos (disparar el cañón láser y el regreso del destello procedente del espejo) en el sistema de la nave y en el sistema de la plataforma. Hallar la distancia recorrida por la nave y la cantidad en que están desincronizados los relojes de la plataforma vistos desde la nave.

Llamaremos S' al sistema de referencia de la nave espacial y S al de la plataforma. En la nave la luz va desde el cañón al espejo y vuelve, lo que representa una distancia total de $D=30\ c\cdot\text{min}$. El tiempo que emplea la luz en recorrer 30 $c\cdot$min es

$$\Delta t'=\frac{D}{c}=\frac{(30c\cdot\text{min})}{c}=30\ \text{min}$$

Como ambos sucesos ocurren en el mismo lugar de la nave, el intervalo de tiempo es el tiempo propio:

$$\Delta t_{\mathrm{p}}=D/c=30\ \text{min}$$

Durante este tiempo, la plataforma se mueve hacia atrás respecto a la nave una distancia igual a la distancia L' existente entre los relojes de la plataforma medidos en el sistema S':

$$L'=\Delta x'=V\ \Delta t'=(0{,}8c)(30\ \text{min})=24c\cdot\text{min}$$

En el sistema S, el tiempo transcurrido entre los sucesos es más largo en un factor γ. Como $V/c=0{,}8$, $1-V^2/c^2=1-0{,}64=0{,}36$. El factor γ es, pues,

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}=\frac{1}{\sqrt{0{,}36}}=\frac{1}{0{,}6}=\frac{5}{3}$$

Por consiguiente, el tiempo transcurrido entre los sucesos según se observan en el sistema S es

$$\Delta t=\gamma\ \Delta t_{\mathrm{p}}=\frac{5}{3}\ (30\ \text{min})=50\ \text{min}$$

Durante este tiempo, la nave recorre una distancia en el sistema S igual a la distancia propia entre los relojes de la plataforma:

$$L_{\mathrm{p}}=\Delta x=V\ \Delta t=(0{,}8c)(50\ \text{min})=40c\cdot\text{min}$$

Obsérvese que esta distancia es más larga que la distancia contraída entre los relojes que miden los observadores en el sistema S' de la nave.

Los observadores situados en la plataforma dirán que el reloj de la nave está atrasando puesto que registra un tiempo de 30 minutos solamente entre los sucesos, mientras que el tiempo medido en la plataforma es de 50 minutos.

La figura 34-13 muestra la situación vista desde la nave espacial en S'. La plataforma está viendo pasar la nave con velocidad $0{,}8c$. Existe un reloj en el punto x_1, que coincide con la nave cuando se dispara el cañón láser y otro en el punto x_2, que coincide con la nave cuando se recibe el destello de retorno del espejo. Supongamos que el reloj en x_1 marca las 12:00 (mediodía) en el instante de lanzar el destello. Los relojes en x_1 y x_2 están sincronizados en S pero no en S'. En S', el reloj en x_2, que está cazando al que está en x_1, adelanta en

$$\frac{L_{\mathrm{p}}V}{c^2}=\frac{(40c\cdot\text{min})(0{,}8c)}{c^2}=32\ \text{min}$$

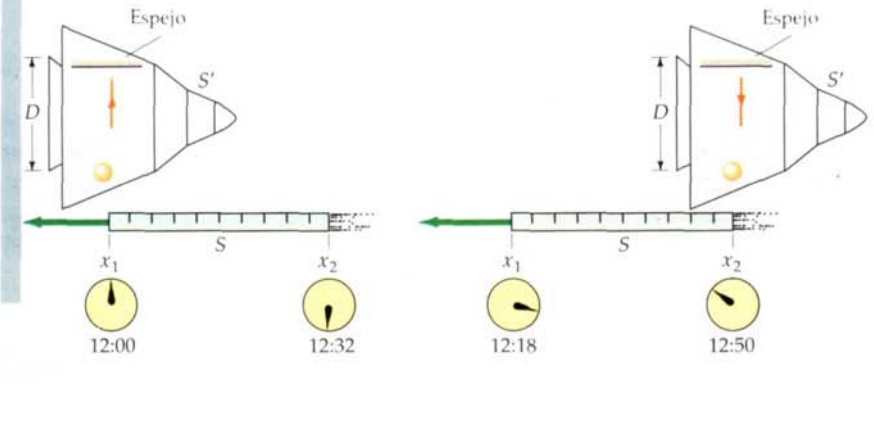


Figura 34-13 Ejemplo 34-4. Relojes situados en una plataforma observados desde el sistema de referencia de la nave S'. Durante el tiempo $\Delta t'=30$ min que emplea la plataforma en atravesar la nave, los relojes en la plataforma se retrasan y señalan sólo $(30\ \text{min})/\gamma=18$ min. Pero los relojes no están sincronizados, de forma que el reloj cazador adelante en $L_{\mathrm{p}}V/c^2$, que en este caso vale 32 min. El tiempo que tarda la nave espacial en pasar según se aprecia en la plataforma es, por consiguiente, 32 min + 18 min = 50 min.

Cuando la nave coincide con x_2, el reloj marca allí 12:50. Por consiguiente el tiempo transcurrido entre los sucesos en S es 50 minutos. Obsérvese que de acuerdo con los observadores situados en S', este reloj señala un tiempo de 50 min — 32 min = 18 min para un viaje que dura 30 min en S'. Así pues, los observadores en S' ven cómo este reloj se va retrasando en un factor de 30/18 = 5/3.

Cada observador en uno de los sistemas ve que los relojes del otro sistema retrasan. De acuerdo con los observadores en S, que miden 50 min para el intervalo de tiempo, el intervalo de tiempo en S' (30 min) es demasiado pequeño, de modo que ven a cada reloj aislado en S' marchar más despacio en un factor de 5/3. De acuerdo con los observadores en S', los observadores en S miden un tiempo que es demasiado *largo* a pesar del hecho de que sus relojes retrasan porque los relojes en S no están sincronizados. Los relojes se mueven sólo durante 18 minutos, pero el segundo adelanta al primero en 32 minutos, de modo que el intervalo de tiempo es 50 minutos.

Cuestiones

2. Dos observadores están en movimiento relativo. ¿En qué circunstancias pueden estar de acuerdo en la simultaneidad de dos sucesos diferentes?
3. Si el suceso A se produce antes que se produzca el suceso B en un sistema determinado, ¿puede ser posible que exista un sistema de referencia en el que el suceso B se produzca antes que el suceso A?
4. Dos sucesos son simultáneos en un sistema en el cual se producen además en el mismo punto del espacio. ¿Son simultáneos en otros sistemas de referencia?

34-6 Efecto Doppler

Al deducir el efecto doppler para el sonido (sección 14-9) vimos que la variación de frecuencia en el caso de una velocidad dada V depende de que sea la fuente o el receptor el que se está moviendo con esta velocidad. Esta diferencia es posible en el caso del sonido debido a que existe un medio (el aire) respecto al cual tiene lugar el movimiento, y así no es sorprendente que pueda distinguirse el movimiento de la fuente o del receptor respecto al aire en calma. Esta distinción o diferencia entre el movimiento de la fuente o del receptor no puede hacerse en el caso de la luz o de otras ondas electromagnéticas en el vacío. Las expresiones que hemos deducido para el efecto doppler no pueden corregirse en el caso de la luz. Deduciremos ahora el efecto doppler relativista.

Consideremos una fuente que se mueve hacia un receptor con velocidad V y que está en el mismo sistema que el receptor. Supongamos que la fuente emite N ondas electromagnéticas. Si la fuente se mueve hacia el receptor, la primera onda recorrerá una distancia $c\,\Delta t_R$ y la fuente recorrerá $V\,\Delta t_R$ en el tiempo Δt_R medido en el sistema del receptor. La longitud de onda será

$$\lambda' = \frac{(c\,\Delta t_R - V\,\Delta t_R)}{N}$$

La frecuencia f' observada por el receptor será por tanto

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{c - V}\,\frac{N}{\Delta t_R}$$

$$= \frac{1}{1 - V/c}\,\frac{N}{\Delta t_R}$$

Si la frecuencia de la fuente es f_0, emitirá $N = f_0\,\Delta t_S$ ondas en el tiempo Δt_S medido por la fuente. En este caso Δt_S es el invervalo de tiempo propio (la primera onda y la onda enésima se emiten en el mismo lugar en el sistema de referencia de la fuente). Los tiempos Δt_S y Δt_R están relacionados por la ecuación normal de la dilatación del tiempo $\Delta t_R = \gamma\ \Delta t_S$. Así pues obtenemos en el caso del efecto doppler de una fuente luminosa móvil

$$f' = \frac{1}{1 - V/c}\ \frac{f_0\ \Delta t_S}{\Delta t_R} = \frac{f_0}{1 - V/c}\ \frac{1}{\gamma}$$

o bien

$$f' = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V/c}\ f_0 = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}}\ f_0 \qquad \text{cuando se aproximan} \qquad 34\text{-}24a$$

Esta expresión sólo difiere de nuestra ecuación clásica en el factor de dilatación del tiempo.

Cuando el foco y el receptor se mueven alejándose entre sí, el mismo análisis demuestra que la frecuencia observada viene dada por

$$f' = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + V/c}\ f_0 = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}\ f_0 \qquad \text{cuando se alejan} \qquad 34\text{-}24b$$

Se deja como problema (problema 34-64) el demostrar que se obtienen los mismos resultados si se hacen los cálculos en el sistema de referencia de la fuente.

Ejemplo 34-5

La longitud de onda más larga emitida por el hidrógeno en la serie de Balmer (ver capítulo 35) tiene un valor de $\lambda_0 = 656$ nm. En la luz procedente de una galaxia lejana, el valor medido es $\lambda' = 1458$ nm. Hallar la velocidad de alejamiento o retroceso de dicha galaxia respecto a la Tierra.

Si sustituimos $f' = c/\lambda'$ y $f_0 = c/\lambda_0$ en la ecuación 34-24*b*, se tiene

$$\sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} = \frac{f'}{f_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda'}$$

Esta ecuación se simplifica un poco si ponemos $\beta = V/c$. Entonces elevando al cuadrado dicha ecuación y tomando la inversa de cada miembro, tendremos

$$\frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \left(\frac{\lambda'}{\lambda_0}\right)^2 = \left(\frac{1458 \text{ nm}}{656 \text{ nm}}\right)^2 = 4{,}94$$

de modo que

$$1 + \beta = 4{,}94 - 4{,}94\ \beta$$

$$\beta = \frac{4{,}94 - 1}{4{,}94 + 1} = 0{,}663 = \frac{V}{c}$$

La galaxia, pues, se está alejando a una velocidad de $V = 0{,}663c$. El desplazamiento hacia longitudes de onda más largas de la luz procedente de las galaxias distantes que se están alejando de nosotros se denomina **desplazamiento hacia el rojo**.

34-7 Paradoja de los gemelos

Homero y Ulises son gemelos idénticos. Ulises realiza un viaje a una velocidad muy elevada hacia un planeta más allá del sistema solar y vuelve a la Tierra mientras Homero permanece en ella. Cuando se reúnen de nuevo, ¿cuál de los gemelos es más viejo, o son ambos de la misma edad? La respuesta correcta es que Homero, el gemelo que permaneció en su casa, es más viejo. Este problema, con variaciones, ha sido un tema de grandes debates durante decenios, aunque hay muy pocos que estén en desacuerdo con la respuesta anterior.* El problema es una paradoja debido al papel aparentemente simétrico que juegan ambos gemelos frente al resultado asimétrico que se obtiene para su edad. La paradoja se resuelve cuando se observa la asimetría del papel de ambos gemelos. El resultado relativista está en conflicto con el sentido común que se basa en nuestra creencia fuerte, pero incorrecta, de la existencia de una simultaneidad absoluta. Consideremos un caso particular con ciertos valores numéricos que, aunque sea impracticable, hace que los cálculos sean más sencillos.

Supongamos que el planeta P y Homero situado en la Tierra y distante L_p del anterior están fijos en el sistema de referencia S, según se ve en la figura 34-14. Despreciemos el movimiento de la Tierra. Los sistema de referencia S' y S'' se están moviendo con velocidad V hacia el planeta y alejándose de él respectivamente. Ulises acelera rápidamente hasta alcanzar la velocidad V; luego viaja con velocidad de crucero en S' hasta que alcanza el planeta que es cuando se detiene quedando momentáneamente en reposo en S. Para volver, acelera rápidamente hasta la velocidad V hacia la Tierra y viaja en S'' hasta que la alcanza, deteniéndose finalmente. Podemos admitir que los tiempos de aceleración son despreciables en comparación con los tiempos de vuelo en crucero. Para ilustrar el problema podemos utilizar los valores siguientes: $L_p=8$ años-luz y $V=0{,}8c$; entonces $\sqrt{1-V^2/c^2}=3/5$ y $\gamma=5/3$.

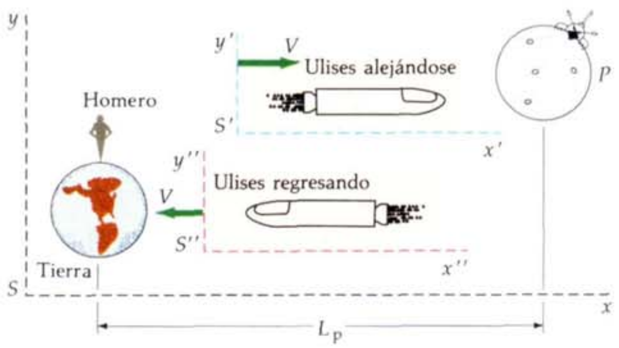


Figura 34-14 Paradoja de los gemelos. La Tierra y un planeta lejano están fijos en el sistema S. Ulises vuela en el sistema S' hacia el planeta y luego regresa a la Tierra en el S''. Su gemelo Homero queda en la Tierra. Cuando Ulises regresa es más joven que su gemelo. Los papeles jugados por los gemelos no son simétricos. Homero permanece en un sistema de referencia inercial, pero Ulises ha de acelerar si quiere volver a casa.

Es sencillo analizar el problema desde el punto de vista de Homero en la Tierra. De acuerdo con el reloj de Homero, Ulises está viajando en S' durante un tiempo $L_p/V=10$ años y en S'' durante otro tiempo igual. Así pues Homero es 20 años más viejo cuando Ulises regresa. El intervalo de tiempo en S' entre el momento de abandonar la Tierra y llegar al planeta es más corto debido a su tiempo propio. El tiempo para alcanzar el planeta en el reloj de Ulises es

$$\Delta t'=\frac{\Delta t}{\gamma}=\frac{10\ \text{a}}{5/3}=6\ \text{años}$$

Puesto que se requiere el mismo tiempo para el viaje de vuelta, Ulises habrá anotado 12 años para el viaje de ida y vuelta y será 8 años más joven que Homero.

Desde el punto de vista de Ulises, el cálculo de su tiempo de viaje no es difícil. La distancia de la Tierra al planeta está contraída y es sólo

$$L'=\frac{L_p}{\gamma}=\frac{8\ \text{años-luz}}{5/3}=4{,}8\ \text{años-luz}$$

Para $V=0{,}8c$, emplearía sólo 6 años en cada parte del viaje.

La dificultad real de este problema consiste en que Ulises ha de comprender por qué su gemelo ha envejecido en 20 años durante su ausencia. Si consideramos a Ulises en reposo y a Homero moviéndose, su reloj atrasará y deberá medir

* Puede encontrarse una colección de varios artículos relativos a esta paradoja en *Special Relativity Theory, Selected Reprints*, American Association of Physics Teachers, New York, 1963.

sólo $\frac{3}{5}(6)$ =3,6 años. Entonces, ¿por qué no ha envejecido Homero sólo 7,2 años durante el viaje completo? Como es natural, aquí radica la paradoja. La dificultad en el caso del análisis desde el punto de vista de Ulises es que no permanece en un sistema inercial. ¿Qué ocurre mientras Ulises está frenando y arrancando? Para investigar este problema con detalle necesitamos considerar los sistemas de referencia acelerados, problema relacionado con el estudio de la relatividad general y más allá del objetivo de este texto. Sería instructivo considerar que los gemelos envían señales regulares uno al otro de modo que pueden anotar la edad del otro continuamente. Si se disponen las cosas de modo que se envíe una señal cada año, la edad del otro gemelo puede determinarse simplemente contando las señales recibidas. La frecuencia de llegada de las señales no será una por año debido al desplazamiento doppler. La frecuencia observada vendrá dada por las ecuaciones 34-24*a* y 34-24*b*. Utilizando $V/c=0{,}8$ y $V^2/c^2=0{,}64$, se tiene para el caso en que los dos gemelos se están alejando el uno del otro

$$f' = \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+V/c}\,f_0 = \frac{\sqrt{1-0{,}64}}{1+0{,}8}\,f_0 = \frac{1}{3}\,f_0$$

Cuando se estén acercando, la ecuación 34-24 da $f'=3f_0$.

Consideramos la situación primero desde el punto de vista de Ulises. Durante los seis años que tarda en alcanzar el planeta (recuérdese que la distancia se contrae en su sistema de referencia), recibe señales al ritmo de $\frac{1}{3}$ por año, y por lo tanto recibe dos señales. Tan pronto él empieza el viaje de regreso, recibe tres señales por año; en los seis años que tarda en regresar recibirá 18 señales, dando un total de 20 durante todo el viaje. De acuerdo con ello espera que su gemelo haya envejecido estos 20 años.

Consideremos ahora la situación desde el punto de vista de Homero. Recibe señales al ritmo de $\frac{1}{3}$ por año durante los 10 años que tarda Ulises en llegar al planeta, y también durante el tiempo que empleará la última señal enviada por Ulises antes de que él regrese a la Tierra. (No puede saber que Ulises ha empezado el viaje de vuelta hasta que le lleguen las señales con frecuencia creciente.) Puesto que el planeta está a una distancia de 8 años-luz, se han de añadir estos 8 años en la recepción de señales a un ritmo de $\frac{1}{3}$ de señal por año. Durante los primeros 18 años, Homero recibe 6 señales. En los dos años finales antes de que Ulises llegue, Homero recibe 6 señales, o sea 3 por año. (La primera señal enviada después de que Ulises inicie el regreso emplea 8 años en alcanzar la Tierra, mientras que Ulises moviéndose a una velocidad 0,8c, tardará 10 años en regresar y por lo tanto llegará exactamente dos años después de que Homero empiece a recibir señales al ritmo más elevado.) Así pues Homero espera que Ulises haya envejecido 12 años. En este análisis, resulta evidente la asimetría de los papeles que juegan los dos gemelos. Ambos están de acuerdo en que, cuando se reúnan, el que ha sido acelerado será más joven que el que ha permanecido quieto en casa.

Las predicciones de la teoría especial de la relatividad respecto a la paradoja de los gemelos han sido ensayadas muchas veces utilizando partículas pequeñas que pueden acelerarse a velocidades tan grandes que γ es apreciablemente mayor que 1. Pueden acelerarse partículas inestables y atraparse en órbitas circulares dentro de un campo magnético, por ejemplo, compararse sus períodos de vida con los de partículas idénticas en reposo. En estos experimentos las partículas aceleradas viven mayor tiempo en valor medio que las que están en reposo, según acabamos de predecir. Estas predicciones se confirman también por los resultados de los experimentos utilizando relojes atómicos de alta precisión que vuelan alrededor de la Tierra en aviones comerciales, pero el análisis de este experimento es complicado por las necesidades de incluir efectos gravitatorios considerados en la teoría general de la relatividad.*

* Los detalles de este experimento pueden encontrarse en los artículos de J.C. Hafele y Richard E. Keating, «Around-the-world Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains» y «Around-the-world Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains», *Science*, julio 14, 1972, pág. 166.

34-8 Transformación de la velocidad

Se puede hallar la forma en que se transforman las velocidades de un sistema de referencia a otro, derivando las ecuaciones de transformación de Lorentz. Supongamos que una partícula tiene una velocidad $u'_x = dx'/dt'$ en el sistema S', que se está moviendo hacia la derecha con velocidad V respecto al sistema S. Su velocidad en el sistema S es

$$u_x = \frac{dx}{dt}$$

A partir de las ecuaciones de transformación de Lorentz (ecuaciones 34-16 y 34-17) se tiene

$$dx = \gamma(dx' + V\, dt')$$

y

$$dt = \gamma\left(dt' + \frac{V\, dx'}{c^2}\right)$$

La velocidad en S es, pues,

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + V\, dt')}{\gamma\left(dt' + \frac{V\, dx'}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} = \frac{u'_x + V}{1 + Vu'_x/c^2}$$

Si una partícula tiene componentes de velocidad a lo largo de los ejes y o z, podemos utilizar la misma relación entre dt y dt' con $dy = dy'$ y $dz = dz'$, para obtener

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{V\, dx'}{c^2}\right)} = \frac{dy'/dt'}{\gamma\left(1 + \frac{V}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)} = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{Vu'_x}{c^2}\right)}$$

y

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{Vu'_x}{c^2}\right)}$$

La transformación relativista completa de velocidades es

Transformación relativista de velocidades

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + Vu'_x/c^2} \qquad \text{34-25}a$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + Vu'_x/c^2)} \qquad \text{34-25}b$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + Vu'_x/c^2)} \qquad \text{34-25}c$$

Las ecuaciones de la transformación inversa de las velocidades son

$$u'_x = \frac{u_x - V}{1 - Vu_x/c^2} \qquad \text{34-26}a$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)} \qquad \text{34-26}b$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - Vu_x/c^2)} \qquad \text{34-26}c$$

Estas ecuaciones difieren del resultado clásico e intuitivo $u_x = u'_x + V$, $u_y = u'_y$ y $u_z = u'_z$ debido a que los denominadores de las ecuaciones 34-25 y 34-26 no son iguales a 1. Cuando V y u'_x son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz c, $\gamma \approx 1$ y $Vu'_x/c^2 \ll 1$. Entonces las expresiones relativista y clásica coinciden.

Ejemplo 34-6

Un avión supersónico se mueve con una velocidad de 1000 m/s (del orden de 3 veces la velocidad del sonido) a lo largo del eje x respecto al observador. Otro avión se mueve a lo largo del eje x con una velocidad de 500 m/s respecto al primer avión. ¿Con qué velocidad se está moviendo el segundo avión respecto al observador?

De acuerdo con la forma clásica de combinar velocidades, la velocidad del segundo avión respecto al observador es 1000 m/s + 500 m/s = 1500 m/s. Si suponemos que el observador está en reposo en el sistema de referencia S y que el primer avión están en reposo en el sistema S' que se está moviendo a $V = 1000$ m/s respecto a S, el segundo avión tiene una velocidad $u'_x = 500$ m/s en S'. El término de corrección para u_x en el denominador de la ecuación 34-25*a* es entonces

$$\frac{Vu'_x}{c^2} = \frac{(1000)(500)}{(3\times10^8)^2} \approx 5\times10^{-12}$$

Este término de corrección es tan pequeño que los resultados clásico y relativista son esencialmente iguales.

Ejemplo 34-7

Repetir el ejemplo 34-6 si el primer avión se mueve con una velocidad $V = 0{,}8c$ respecto al observador y el segundo avión se mueve con la misma velocidad $0{,}8c$ respecto al primero.

En este caso el término de corrección es

$$\frac{Vu'_x}{c^2} = \frac{(0{,}8c)(0{,}8c)}{c^2} = 0{,}64$$

La velocidad del segundo avión en el sistema S es entonces

$$u_x = \frac{0{,}8c + 0{,}8c}{1 + 0{,}64} = 0{,}98c$$

Este valor es muy diferente del resultado clásico esperado de $0{,}8c + 0{,}8c = 1{,}6c$. De hecho, puede demostrarse a partir de la ecuación 34-25 que si la velocidad de un objeto es menor que c en un sistema de referencia, es menor que c en cualquier otro sistema que se mueva respecto al anterior con una velocidad inferior a c. Veremos en la sección 34-10 que se debería emplear una cantidad infinita de energía para acelerar una partícula hasta la velocidad de la luz. Por consiguiente, la velocidad de la luz c es un límite superior e inalcanzable para la velocidad de cualquier partícula que posea masa. (Las partículas sin masa, como los fotones, siempre se mueven con la velocidad de la luz.)

Ejemplo 34-8

La luz se mueve a lo largo del eje x con velocidad $u_x = c$. ¿Cuál es su velocidad en S'?

A partir de la ecuación 34-26*a*, se tiene

$$u'_x = \frac{c - V}{1 - Vc/c^2} = \frac{c(1 - V/c)}{1 - V/c} = c$$

como exigen los postulados de Einstein.

Cuestión

5. La transformación de Lorentz para y y z coincide con el resultado clásico $y=y'$ y $z=z'$. Sin embargo, la transformación relativista de velocidades no da el resultado clásico $u_y=u'_y$ y $u_z=u'_z$. Explicarlo.

34-9 Cantidad de movimiento relativista

Hemos visto en las secciones anteriores que los postulados de Einstein exigen importantes modificaciones en nuestros conceptos de simultaneidad y de medición de tiempos y longitudes. Pero, lo que quizás sea aún más importante, requieren también que modifiquemos nuestros conceptos e ideas acerca de la masa, la cantidad de movimiento y la energía. En mecánica clásica, se define la cantidad de movimiento de una partícula como el producto de su masa por su velocidad, $\mathbf{p}=m\mathbf{u}$, siendo $\mathbf{u}$ la velocidad. En un sistema aislado de partículas, sin ninguna fuerza neta que actúe sobre el mismo, la cantidad de movimiento total del sistema permanece constante.

En esta sección veremos mediante un sencillo experimento mental que la expresión clásica para la cantidad de movimiento, $\mathbf{p}=m\mathbf{u}$, es sólo una aproximación. Es decir, esta cantidad no se conserva en un sistema aislado. Consideremos dos observadores: el observador A en el sistema de referencia S y el observador B en el sistema S'. Cada observador tiene una bola de masa m, que son idénticas cuando se comparan en reposo. Ambos observadores lanzan sus bolas verticalmente con una velocidad u_0 de forma que recorre una distancia L, realiza un choque elástico con la otra y regresa. La figura 34-15 muestra el aspecto que presentan ambas colisiones en cada sistema de referencia. Clásicamente, las dos bolas tienen una cantidad de movimiento vertical de valor mu_0. Como los componentes verticales de las cantidades de movimiento son iguales y opuestos, el componente vertical de la cantidad de movimiento total es nula antes del choque. Éste simplemente invierte la cantidad de movimiento de las bolas, de modo que la cantidad de movimiento vertical total después del choque es también nula.

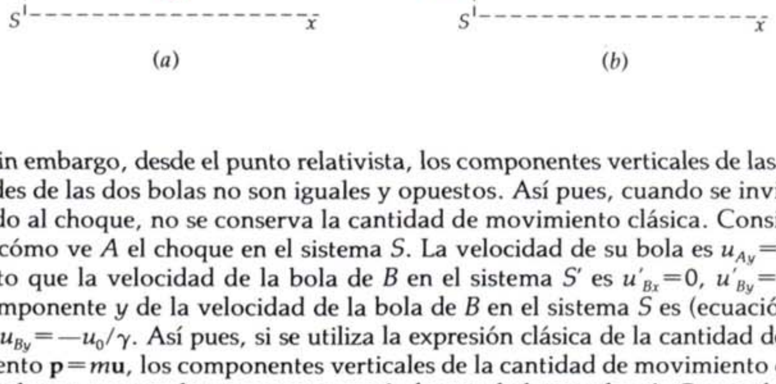


Figura 34-15 (*a*) Choque elástico de dos bolas idénticas vistas en el sistema S. El componente vertical de la velocidad de la bola B es u_0/γ en S si vale u_0 en S'. (*b*) El mismo choque visto en S'. En este sistema la bola A tiene un componente vertical de la velocidad u_0/γ.

Sin embargo, desde el punto relativista, los componentes verticales de las velocidades de las dos bolas no son iguales y opuestos. Así pues, cuando se invierten debido al choque, no se conserva la cantidad de movimiento clásica. Consideremos cómo ve A el choque en el sistema S. La velocidad de su bola es $u_{Ay}=+u_0$. Puesto que la velocidad de la bola de B en el sistema S' es $u'_{Bx}=0$, $u'_{By}=-u_0$, el componente y de la velocidad de la bola de B en el sistema S es (ecuación 34-25*b*) $u_{By}=-u_0/\gamma$. Así pues, si se utiliza la expresión clásica de la cantidad de movimiento $\mathbf{p}=m\mathbf{u}$, los componentes verticales de la cantidad de movimiento de las dos bolas no son iguales ni opuestos según los ve el observador A. Como el sentido de movimiento de las bolas se invierte en el choque, no se conserva la cantidad de movimiento. Como es natural, B observa el mismo resultado. En el límite clásico, cuando u es mucho menor que c, γ es aproximadamente 1, y se conserva la cantidad de movimiento del sistema con cualquiera de los observadores.

La razón por la cual la cantidad de movimiento es importante en la mecánica clásica, se debe a que la misma se conserva cuando no existen fuerzas externas actuando sobre el sistema, como sucede con las colisiones. Ahora hemos visto que la cantidad $\Sigma m\mathbf{u}$ se conserva únicamente en la aproximación en que $u \ll c$. Definiremos la cantidad de movimiento relativista **p** de una partícula de maner: que posea las siguientes propiedades:

1. En las colisiones, **p** se conserva.
2. Cuando u/c tienda a cero, **p** tenderá a $m\mathbf{u}$.

Demostraremos a continuación que en la colisión elástica indicada en la figura 34-15 se conserva la magnitud

$$\mathbf{p}=\frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad \text{34-27}$$

Como esta magnitud también tiende a $m\mathbf{u}$ cuando u/c tiende a cero, tomaremos esta ecuación como la definición de la **cantidad de movimiento relativista** de una partícula.

Calcularemos el componente y de la cantidad de movimiento relativista de cada partícula en el sistema de referencia S y demostraremos que el componente y de la cantidad de movimiento total relativista es nulo. La velocidad de la bola A en S es u_0, de modo que el componente y de su cantidad de movimiento relativista es

$$p_{Ay}=\frac{mu_0}{\sqrt{1-u_0^2/\ ^2}}$$

La velocidad de la bola B en S es más complicada. Su componente x es V y su componente y es $-u_0/\gamma$. Así pues,

$$u_B^2=u_{Bx}^2+u_{By}^2=V^2+(-u_0\sqrt{1-V^2/c^2})^2=V^2+u_0^2-\frac{u_0^2V^2}{c^2}$$

Utilizando este resultado para calcular $\sqrt{1-u_B^2/c^2}$, se obtiene

$$1-\frac{u_B^2}{c^2}=1-\frac{V^2}{c^2}-\frac{u_0^2}{c^2}+\frac{u_0^2V^2}{c^4}=(1-V^2/c^2)(1-u_0^2/c^2)$$

y

$$\sqrt{1-u_B^2/c^2}=\sqrt{1-V^2/c^2}\sqrt{1-u_0^2/c^2}=\frac{1}{\gamma}\sqrt{1-u_0^2/c^2}$$

Por lo tanto, el componente y de la cantidad de movimiento relativista de la bola B vista en S es

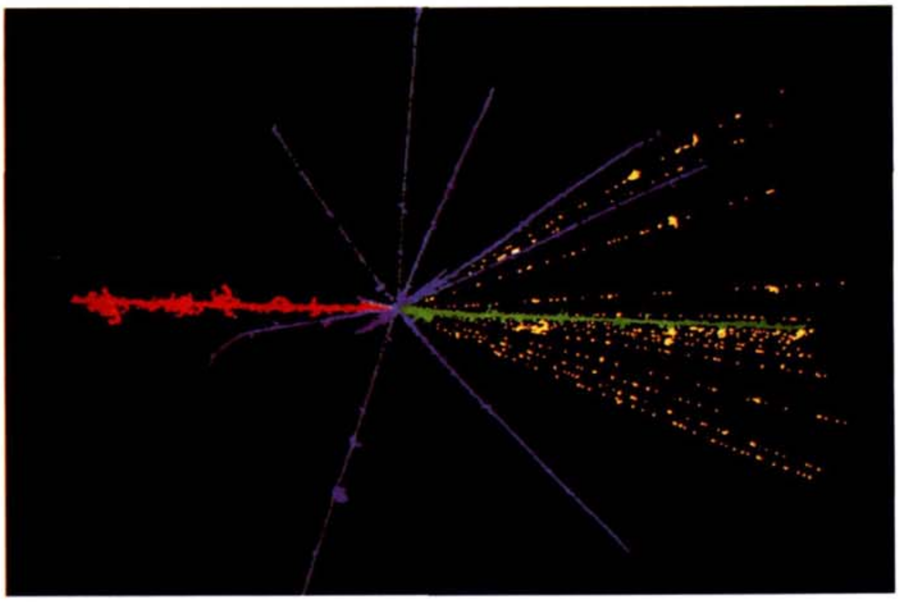
$$p_{By}=\frac{mu_{By}}{\sqrt{1-u_B^2/c^2}}=\frac{-mu_0/\gamma}{(1/\gamma)\sqrt{1-u_0^2/c^2}}=\frac{-mu_0}{\sqrt{1-u_0^2/c^2}}$$

Como $p_{By}=-p_{Ay}$, el componente y de la cantidad de movimiento total de las dos bolas es cero. Si se invierte la velocidad de cada bola en el choque, la cantidad de movimiento total seguirá siendo cero y, por tanto, se conservará la cantidad de movimiento.

Una interpretación de la ecuación 34-27 es que la masa de un objeto aumenta con la velocidad. La magnitud $m/\sqrt{1-u^2/c^2}$ se denomina **masa relativista** de la partícula. La masa de una partícula cuando está en reposo en un cierto sistema de referencia se denomina su **masa en reposo** m_0. Así pues, la masa aumenta desde m_0 en reposo a $m_r=m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$ cuando se está moviendo con velocidad u. Para evitar confusiones, llamaremos m_0 a la masa en reposo y utilizaremos $m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}$ para la masa relativista en este capítulo. La masa en reposo de una partícula es la misma en todos los sistemas de referencia. Utilizando esta notación, la cantidad de movimiento relativista de una partícula es, entonces,

$$\mathbf{p}=\frac{m_0\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad \text{34-28}$$

Cantidad de movimiento relativista



La creación de partículas elementales demuestra la conversión de energía cinética en energía en reposo. En esta fotografía de 1950 de un chorro de rayos cósmicos, un núcleo de azufre (rojo) de alta energía choca en una emulsión fotográfica y produce una lluvia de partículas, entre las que se incluyen un núcleo de flúor (verde), otros fragmentos nucleares (azul) y alrededor de 16 piones (amarillo).

34-10 Energía relativista

En mecánica clásica, el trabajo realizado por una fuerza no equilibrada que actúa sobre una partícula es igual a la variación de la energía cinética de la misma. En la mecánica relativista, igualaremos la fuerza no equilibrada a la variación temporal de la cantidad de movimiento relativista. El trabajo realizado por una fuerza de este tipo puede calcularse entonces e igualarse a la variación de la energía cinética. Como en la mecánica clásica, definiremos la energía cinética como el trabajo realizado por una fuerza no equilibrada para acelerar una partícula desde el reposo hasta una cierta velocidad. Considerando sólo una dimensión, se tiene

$$E_c=\int_{u=0}^{u} \sum F\, ds = \int_0^u \frac{dp}{dt}\, ds=\int_0^u u\, dp= \int_0^u u\, d\left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) \qquad 34\text{-}29$$

en donde hemos utilizado $u=ds/dt$. Se deja como problema a resolver (problema 70) el demostrar que

$$d\left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)=m_0\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2} du$$

Si sustituimos esta expresión en el integrando de la ecuación 34-29, se tiene

$$E_c=\int_0^u u\, d\left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) = \int_0^u m_0\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2} u\, du$$

$$=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-1\right)$$

o bien

$$E_c=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-m_0c^2 \qquad 34\text{-}30$$

La expresión de la energía cinética consta de dos términos. El primero depende de la velocidad de la partícula. El segundo, m_0c^2, es independiente de la velocidad. La magnitud m_0c^2 se denomina **energía en reposo** de la partícula E_0, y es igual al producto de la masa en reposo por c^2:

$$E_0 = m_0c^2 \tag{34-31}$$

Energía en reposo

La **energía relativista** total E se define entonces como la suma de la energía cinética más la energía en reposo:

$$E = E_c + m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \tag{34-32}$$

Energía relativista

Así pues, el trabajo realizado por una fuerza sin equilibrar aumenta la energía desde el valor de la energía en reposo m_0c^2 hasta el valor final de la energía $m_0c^2/\sqrt{1 - u^2/c^2} = m_rc^2$, en donde $m_r = m_0/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ es la masa relativista. Puede obtenerse una expresión útil para la velocidad de la partícula multiplicando la ecuación 34-28 de la cantidad de movimiento relativista por c^2 y comparando el resultado con la ecuación 34-32 correspondiente a la energía relativista. Se tiene

$$pc^2 = \frac{m_0c^2u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = Eu$$

o bien

$$\frac{u}{c} = \frac{pc}{E} \tag{34-33}$$

Ejemplo 34-9

Un electrón con su energía en reposo 0,511 MeV se mueve con velocidad $u = 0{,}8c$. Hallar su energía total, su energía cinética y su cantidad de movimiento.

Primero calcularemos el factor $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$.

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}64}} = \frac{5}{3} = 1{,}67$$

La energía total es entonces

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 1{,}67\ (0{,}511\ \text{MeV}) = 0{,}853\ \text{MeV}$$

La energía cinética es la energía total menos la energía en reposo:

$$E_c = E - m_0c^2 = 0{,}853\ \text{MeV} - 0{,}511\ \text{MeV} = 0{,}342\ \text{Mev}$$

El valor de la cantidad de movimiento es

$$p = \frac{m_0u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = (1{,}67)m_0(0{,}8c) = \frac{1{,}33m_0c^2}{c}$$

$$= \frac{(1{,}33)(0{,}511\ \text{MeV})}{c} = 0{,}680\ \text{MeV}/c$$

La unidad MeV/c es una unidad conveniente de cantidad de movimiento.

La expresión para la energía cinética dada por la ecuación 34-30 no se parece apenas a la expresión clásica $\frac{1}{2}m_0u^2$. Sin embargo, cuando u es mucho menor que c, podemos obtener un valor aproximado de $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ utilizando el desarrollo del binomio (ecuación 34-2):

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$
$$\approx 1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$$

A partir de este resultado, cuando u es mucho menor que c, la expresión para la energía cinética relativista se transforma en

$$E_c=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}-1\right)$$
$$\approx m_0c^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}-1\right)$$
$$=\frac{1}{2}m_0u^2$$

Por tanto, a velocidades bajas la expresión relativista es equivalente a la expresión clásica.

Obsérvese en la ecuación 34-32 que cuando la velocidad u se acerca a la velocidad de la luz c, la energía de la partícula se hace muy grande porque $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ se hace cada vez mayor. Para $u=c$, la energía resulta infinita. Si u fuese mayor que c, $\sqrt{1-u^2/c^2}$ resulta ser la raíz cuadrada de un número negativo y, por consiguiente, es imaginaria. Se puede dar una interpretación simple de este resultado considerando que deberá emplearse una cantidad infinita de energía en acelerar una partícula hasta alcanzar la velocidad de la luz, de modo que no puede existir ninguna partícula que estando en reposo en un sistema de referencia inercial cualquiera pueda llegar a moverse con una velocidad igual o mayor que la de la luz c. Como indicábamos en el ejemplo 34-7, si la velocidad de una partícula es menor que c en un sistema de referencia, es menor que c en cualquier otro sistema de referencia que se mueva respecto al primero con velocidades inferiores a c.

En las aplicaciones prácticas, en lugar de la velocidad suele conocerse la cantidad de movimiento o la energía de una partícula. Para eliminar la velocidad u pueden combinarse la ecuación 34-28 correspondiente a la cantidad de movimiento relativista con la ecuación 34-32 que nos da la energía relativista. (Ver el problema 48.) El resultado es

Relación entre la energía total, la cantidad de movimiento y la energía en reposo

$$E^2=p^2c^2+(m_0c^2)^2 \qquad 34\text{-}34$$

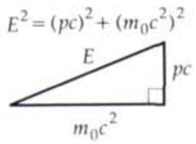


Figura 34-16 Triángulo rectángulo que sirve de regla mnemotécnica para recordar la ecuación 34-34.

Esta útil ecuación puede recordarse mediante la regla mnemotécnica del triángulo indicado en la figura 34-16. Si la energía de una partícula es mucho mayor que su energía en reposo mc^2, puede despreciarse el segundo sumando de la ecuación 34-34, obteniéndose la interesante aproximación

$$E\approx pc \quad \text{para } E\gg m_0c^2 \qquad 34\text{-}35$$

La ecuación 34-35 es una relación exacta entre la energía y la cantidad de movimiento para partículas que carecen de masa en reposo, como los fotones y neutrinos.

Ejercicio

Un protón con una masa en reposo de 938 MeV/c^2 tiene una energía total de 1400 MeV. Hallar (*a*) $1/\sqrt{1-u^2/c^2}$, (*b*) su cantidad de movimiento, y (*c*) su velocidad u. [Respuestas: (*a*) 1,49, (*b*) $p=1040$ MeV/c, (*c*) $u=0{,}74c$]

La identificación del término m_0c^2 con la energía en reposo no es algo simplemente conveniente. La conversión de la energía en reposo en energía cinética con la correspondiente pérdida de energía en reposo es un acontecimiento común en las desintegraciones radiactivas y en las reacciones nucleares, incluyendo la fisión y la fusión nuclear. En esta sección daremos algunos ejemplos de esta transformación. Einstein consideró a la ecuación 34- 31, que relaciona la energía de una partícula con su masa, como el resultado más importante de la teoría de la relatividad. La energía y la inercia, que anteriormente eran dos conceptos diferentes, se relacionan a través de esta famosa ecuación.

Para ilustrar la relación existente entre la masa y la energía, consideremos un choque perfectamente inelástico entre dos partículas. Clásicamente, se pierde energía cinética en un choque de esta clase. Por ejemplo, en el sistema de referencia de cantidad de movimiento nula, las partículas se mueven la una hacia la otra con cantidades iguales y opuestas, y quedan en reposo después del choque. En este sistema de referencia, se pierde la totalidad de la energía cinética que el sistema poseía antes del choque. En cualquier otro sistema de referencia, las partículas se mueven después con la velocidad del centro de masas, pero la cantidad de energía cinética perdida es la misma. Veremos ahora que si suponemos que se conserva la energía relativista total, la pérdida de energía cinética es igual a la ganancia de energía en reposo del sistema. Consideremos una partícula en reposo de masa m_{10} moviéndose con una velocidad inicial u_1 que choca con una partícula en reposo de masa m_{20} que se mueve con velocidad inicial u_2. Las partículas chocan y quedan pegadas, formando una partícula de masa en reposo M_0 que se mueve con velocidad final u_f, como se ve en la figura 34-17. Sea E_1 la energía total inicial y E_{c1} la energía cinética inicial de la partícula 1, y E_2 la energía total inicial y E_{c2} la energía cinética inicial de la partícula 2. La energía total inicial del sistema es

$$E_i = E_1 + E_2$$

y la energía cinética inicial del sistema es

$$E_{ci} = E_{c1} + E_{c2} = (E_1 - m_{10}c^2) + (E_2 - m_{20}c^2)$$

Después del choque, la partícula compuesta tiene una masa en reposo M_0, una energía total E_f y una energía cinética $E_{cf} = E_f - M_0c^2$. La pérdida de energía cinética del sistema es, pues,

$$E_{ci} - E_{cf} = (E_1 + E_2 - m_{10}c^2 - m_{20}c^2) - (E_f - M_0c^2) \qquad 34\text{-}36$$

Si admitimos la conservación de la energía, tendremos $E_f = E_i = E_1 + E_2$. Sustituyendo $E_1 + E_2 - E_f = 0$ en la ecuación 34-36 y ordenando, se tendrá

$$E_{ci} - E_{cf} = [M_0 - (m_{10} + m_{20})]c^2 = (\Delta m_0)c^2 \qquad 34\text{-}37$$

en donde $\Delta m_0 = M_0 - (m_{10} + m_{20})$ es el incremento de la masa en reposo del sistema.

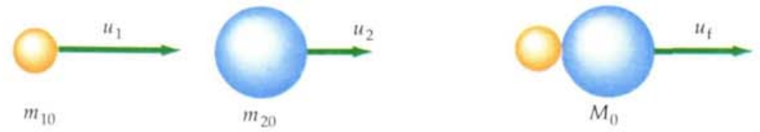


Figura 34-17 Choque perfectamente inelástico entre dos partículas. Una partícula de masa en reposo m_{10} choca con otra de masa en reposo m_{20}. Después de la colisión, las partículas quedan unidas, formando una partícula compuesta de masa en reposo M_0 que se mueve con velocidad u_f de forma que se conserve la cantidad de movimiento relativista. En este proceso se pierde energía cinética. Si suponemos que se conserva la energía total, la pérdida de energía cinética debe ser igual a c^2 veces el aumento de la masa en reposo del sistema.

Veamos algunos ejemplos numéricos de la física atómica y nuclear para ilustrar estos cambios de la masa en reposo y de la energía en reposo. Las energías en física atómica y nuclear suelen expresarse en unidades de electrón-voltios (eV) o megaelectrón-voltios (MeV):

$$1\ \text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{J}$$

Una unidad conveniente para las masas de las partículas atómicas es eV/c^2 o MeV/c^2, que coincide con la energía en reposo de la partícula dividida por c^2. En la tabla 34-1 se dan las masas y energías en reposo de algunas partículas elementales, y en ella se ve que la masa de un núcleo no es igual a la suma de las masas de sus partes.

Tabla 34-1 **Energías en reposo de algunas partículas elementales y núcleos ligeros**

Partículas	Símbolos	Energía en reposo, MeV
Fotón	γ	0
Electrón (positrón)	e o $e^-(e^+)$	0,5110
Muón	$\mu^\pm$	105,7
Pión	π^0	135
	$\pi^\pm$	139,6
Protón	p	938,280
Neutrón	n	939,573
Deuterón	^2H o d	1875,628
Tritón	^3H o t	2808,944
Partícula alfa	^4He o α	3727,409

Ejemplo 34-10

Un deuterón está compuesto por un protón y un neutrón ligados conjuntamente. Es el núcleo del átomo de deuterio, que es un isótopo del hidrógeno denominado hidrógeno pesado y que se escribe ^2H. ¿Cuánta energía se necesita para separar el protón del neutrón en el deuterón?

Según la tabla 34-1, podemos ver que la energía en reposo del deuterón es 1875,63 MeV. La energía en reposo del protón es 938,28 MeV, y la del neutrón es 939,57 MeV. La suma de las energías en reposo del protón y del neutrón es 938,28 MeV+939,57 MeV=1877,85 MeV. Este valor es mayor que la energía en reposo del deuterón en 1877,85 — 1875,63=2,22 MeV. La energía necesaria para romper un núcleo en sus partes constituyentes se denomina **energía de enlace** del núcleo. La energía de enlace del deuterón es 2,22 MeV. Esta es la energía que debe adicionarse al deuterón para romperlo en un protón más un neutrón. Esto puede hacerse bombardeando deuterones con partículas energéticas o con radiación electromagnética con energía de por lo menos 2,22 MeV.

Cuando se forma un deuterón mediante la combinación de un neutrón y de un protón, debe liberarse energía. Cuando los neutrones de un reactor colisionan con protones, algunos neutrones son capturados para formar deuterones. En el proceso de captura se liberan 2,22 MeV de energía, normalmente en forma de radiación electromagnética.

El ejemplo 34-10 ilustra una importante propiedad de los átomos y núcleos. Toda partícula estable compuesta, como un deuterón o un átomo de helio (2 neutrones más 2 protones), que esté formada por otras partículas, tiene una energía en reposo que es menor que la suma de las energías en reposo de sus partes. La diferencia es la energía de enlace de la partícula compuesta. Las energías de enlace de los átomos y moléculas son del orden de algunos electrón-voltios, lo que hace que la diferencia de masas entre la partícula compuesta y sus partes sea despreciable. Las energías de enlace de los núcleos son del orden de varios MeV, lo que origina una diferencia de masas observable. Algunos núcleos muy pesados, como el radio, son radiactivos y se desintegran en núcleos más ligeros, más una partícula alfa. En este caso, el núcleo original tiene una energía en reposo mayor que la de las partículas obtenidas en la desintegración. La energía en exceso aparece como energía cinética de los productos de dicha desintegración.

Ejemplo 34-11

En una reacción de fusión nuclear típica, un núcleo de tritio (^3H) y un núcleo de deuterio (^2H) se fusionan para formar un nucleo de helio (^4He) más un neutrón. ¿Cuánta energía se libera en esta reacción de fusión?

La reacción se escribe así

$$^2H + {}^3H \longrightarrow {}^4He + n$$

Según la tabla 34-1, la energía en reposo de los núcleos de deuterio y tritio es 1875,628 MeV + 2808,944 MeV = 4684,572 MeV. La energía en reposo del núcleo de helio más el neutrón es 3727,409 + 939,573 = 4666,982 MeV. Es inferior al valor anterior en 4684,572 — 4666,982 = 17,59 MeV. La energía liberada en esta reacción es, pues, 17,59 MeV. Esta y otras reacciones de fusión tienen lugar en el Sol siendo responsables de la energía suministrada a la Tierra. Como el Sol emite energía, su masa en reposo está decreciendo continuamente.

Ejemplo 34-12

Un átomo de hidrógeno compuesto por un protón y un electrón tiene una energía de enlace de 13,6 eV. ¿En qué porcentaje es mayor la suma de las masas del protón más el electrón, con respecto a la masa del átomo de hidrógeno?

La energía en reposo de un protón más la de un electrón es 938,28 MeV + 0,511 MeV = 938,791 MeV. La suma de las masas de estas dos partículas es 938,791 MeV/c^2. La masa del átomo de hidrógeno es menor que este valor en 13,6 eV/c^2. La diferencia expresada en porcentaje es

$$\frac{13{,}6 \text{ eV}/c^2}{938{,}791 \times 10^6 \text{ eV}/c^2} = 1{,}45 \times 10^{-8} = 1{,}45 \times 10^{-6}\%$$

Esta diferencia de masa es tan pequeña que es difícilmente medible.

Ejemplo 34-13

Una partícula de masa en reposo 2 MeV/c^2 y energía cinética 3 MeV choca contra una partícula estacionaria de masa en reposo 4 MeV/c^2. Después del choque, las dos partículas quedan unidas. Hallar (*a*) la cantidad de movimiento inicial del sistema, (*b*) la velocidad final del sistema de dos partículas y (*c*) la masa en reposo de dicho sistema.

(*a*) Puesto que la partícula en movimiento tiene una energía cinética de 3 MeV y una energía en reposo de 2 MeV, su energía total vale $E_1 = 5$ MeV. Obtenemos su cantidad de movimiento con la ecuación 34-34

$$pc = \sqrt{E_1^2 - (m_0^2c^2)^2} = \sqrt{(5 \text{ MeV})^2 - (2 \text{ MeV})^2} = \sqrt{21} \text{ MeV}$$

o bien

$$p = 4{,}58 \text{ MeV}/c$$

Como la otra partícula está en reposo, esta cantidad de movimiento es la total del sistema.

(*b*) Podemos hallar la velocidad final del sistema de dos partículas a partir de su energía total E y de su cantidad de movimiento p utilizando la ecuación 34-33. Por la conservación de la energía total, la energía final del sistema es igual a la energía total inicial de las dos partículas:

$$E_f = E_i = E_1 + E_2 = 5\text{ MeV} + 4\text{ MeV} = 9\text{ MeV}$$

Por la conservación de la cantidad de movimiento, la cantidad de movimiento final del sistema de dos partículas es igual a la inicial, $p = 4{,}58\text{ MeV}/c$. Por tanto, la velocidad del sistema de dos partículas viene dada por

$$\frac{u}{c} = \frac{pc}{E} = \frac{4{,}58\text{ MeV}}{9\text{ MeV}} = 0{,}509$$

(*c*) Podemos hallar la masa en reposo del sistema final de dos partículas a partir de la ecuación 34-34 utilizando $pc = 4{,}58$ MeV y $E = 9$ MeV. Se tiene así

$$E^2 = (pc)^2 + (M_0c^2)^2$$

$$(9\text{ MeV})^2 = (4{,}58\text{ MeV})^2 + (M_0c^2)^2$$

$$M_0c^2 = \sqrt{81 - 21}\text{ MeV} = 7{,}75\text{ MeV}$$

$$M_0 = 7{,}75\text{ MeV}/c^2$$

Es instructivo comprobar nuestras respuestas calculando las energías cinéticas inicial y final. La energía cinética inicial es $E_{ci} = 3$ MeV. La energía cinética final vale

$$E_{cf} = E - M_0c^2 = 9\text{ MeV} - 7{,}75\text{ MeV} = 1{,}25\text{ MeV}$$

La pérdida de energía cinética es

$$E_{ci} - E_{cf} = 3\text{ MeV} - 1{,}25\text{ MeV} = 1{,}75\text{ MeV}$$

Como la energía en reposo inicial es 2 MeV + 4 MeV = 6 MeV y la energía en reposo final es $M_0c^2 = 7{,}75$ MeV, la ganancia en energía en reposo es 7,75 MeV − 6 MeV = 1,75 MeV.

34-11 Relatividad general

La generalización de la teoría de la relatividad a los sistemas de referencia no inerciales llevada a cabo por Einstein en 1916 se conoce con el nombre de teoría general de la relatividad. Desde el punto de vista matemático es más compleja que la teoría especial de la relatividad, y existen pocas situaciones en las que pueda comprobarse. Sin embargo su importancia requiere que veamos al menos una breve discusión cualitativa.

El fundamento de la teoría general de la relatividad es el **principio de equivalencia**:

Un campo gravitatorio homogéneo es completamente equivalente a un sistema de referencia uniformemente acelerado.

Este principio surge en la mecánica newtoniana debido a la aparente identidad entre masa inercial y masa gravitatoria. En un campo gravitatorio uniforme, todos los objetos caen con la misma aceleración **g** independientemente de su masa ya que la fuerza gravitatoria es proporcional a la masa (gravitatoria) mientras que la aceleración varía inversamente con la masa (inercial). Supongamos un compartimento situado en el espacio, alejado de toda materia y que se encuentra sometido a una aceleración uniforme **a**, tal como se muestra en la figura 34-18*a*. No se puede llevar a cabo ningún experimento mecánico en el *interior* del compartimento que permita distinguir si éste se encuentra acelerando en el espacio o se encuentra en reposo (o moviéndose con velocidad uniforme) en presencia

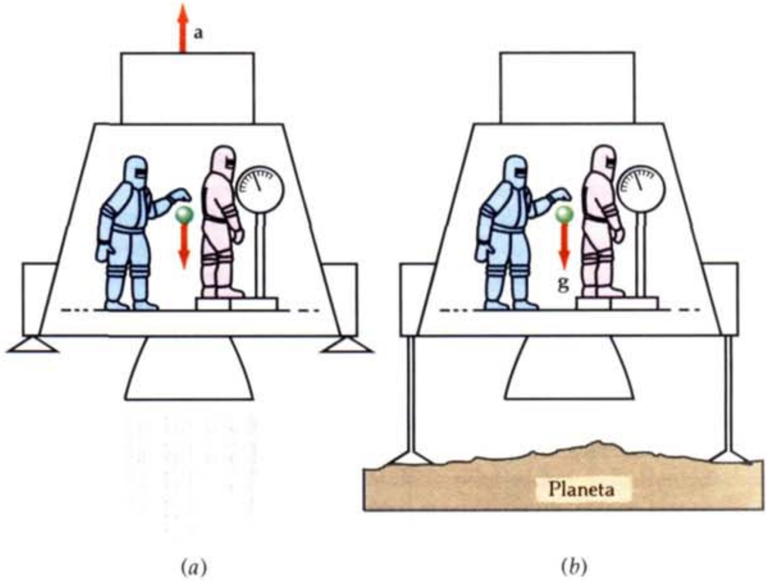


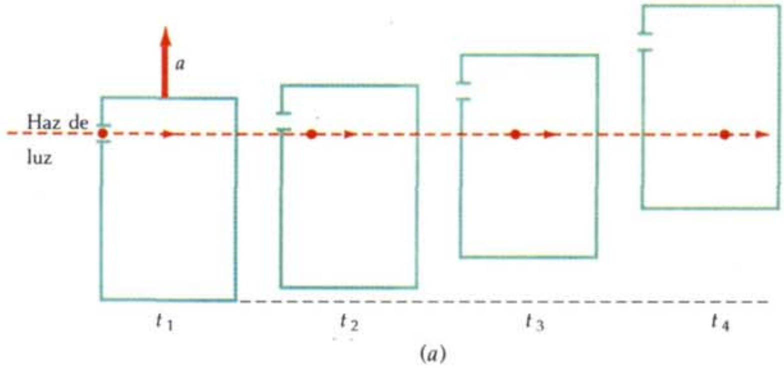
Figura 34-18 Los resultados de los experimentos en un sistema de referencia uniformemente acelerado (*a*) no pueden distinguirse de los realizados en un campo gravitacional uniforme (*b*) si la aceleración **a** y el campo gravitacional **g** tienen la misma magnitud.

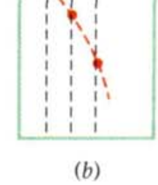
de un campo gravitatorio uniforme $\mathbf{g} = -\mathbf{a}$, como se muestra en la figura 34-18*b*. Si dentro del compartimento se sueltan algunos objetos, caerán hacia el «suelo» con una aceleración $\mathbf{g} = -\mathbf{a}$. Si una persona está sobre una báscula de baño o de muelle, leerá que su «peso» tiene un valor ma.

Einstein supuso que el principio de equivalencia se aplica a todas las ramas de la física y no sólo a la mecánica. Supuso que no podía existir ningún experimento que distinguiese la presencia de un campo gravitatorio de un movimiento uniformemente acelerado. Vamos a estudiar ahora de forma cualitativa un pequeño número de las consecuencias que se derivan de esta suposición.

La primera de las consecuencias del principio de equivalencia que discutiremos, la desviación de un haz de luz en un campo gravitatorio, fue una de las primeras en comprobarse experimentalmente. En la figura 34-19 se muestra un haz de luz que entra en un compartimento que se está acelerando. Se muestran las diferentes posiciones del compartimento para intervalos de tiempo iguales, como se ve en la figura 34-19*a*. Como el compartimento se está acelerando, la distancia que recorre en cada intervalo de tiempo aumenta con el tiempo. Por tanto la trayectoria del haz de luz observada en el interior del compartimento es una parábola, como se muestra en la figura 34-19*b*. Pero de acuerdo con el principio de equivalencia, no es posible distinguir un compartimento en aceleración y otro con velocidad uniforme en un campo gravitatorio uniforme. Por tanto, concluimos, que un haz de luz, como un objeto masivo, se acelerará en un campo gravitatorio. Por ejemplo, en un lugar próximo a la superficie terrestre, la luz caerá con una aceleración de 9,81 m/s². Debido a la enorme velocidad de la luz este valor es difícil de observar. Así por ejemplo para una distancia de 3000 km, que la luz recorre aproximadamente en 0,01 s, un haz de luz caerá aproxima-

Figura 34-19 Haz de luz moviéndose en línea recta a través de un compartimento que experimenta una aceleración uniforme. La posición del haz se muestra a intervalos iguales de tiempo t_1, t_2, t_3, y t_4. (*b*) En el sistema de referencia del compartimento la luz describe una trayectoria parabólica como lo haría una pelota si fuera lanzada horizontalmente. Para dar mayor énfasis los desplazamientos verticales en (*a*) y (*b*) están muy exagerados.





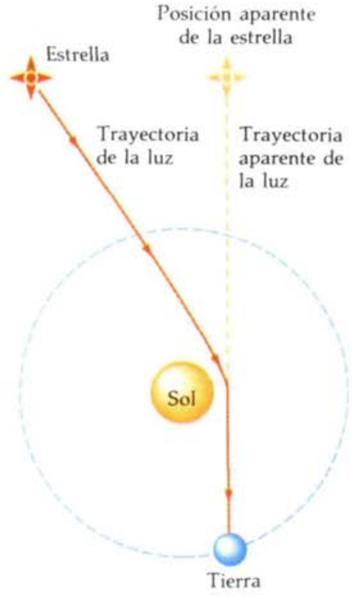


Figura 34-20 Desviación (muy exagerada) de un haz de luz debido a la atracción gravitacional del Sol.

damente 0,5 mm. Einstein dijo que la desviación de un haz de luz en un campo gravitatorio podría observarse cuando la luz procedente de las estrellas lejanas pasara cerca del Sol, como se muestra en la figura 34-20. Debido al brillo del Sol, esta estrella no puede observarse normalmente. Esta desviación fue observada durante un eclipse de Sol en 1919. Esta observación fue ampliamente divulgada y trajo fama mundial a Einstein.

Una segunda predicción de la teoría de la relatividad general de Einstein, que no discutiremos en detalle, es el exceso de precesión del perihelio de la órbita de Mercurio, estimado aproximadamente en 0,01° por siglo. Este efecto era conocido desde hacía tiempo, pero no había podido ser explicado; así pues, en cierto sentido, éste fue uno de los éxitos inmediatos de la teoría.

Una tercera predicción de la relatividad general se refiere a la variación de los intervalos de tiempo y de las frecuencias de la luz en un campo gravitatorio. En el capítulo 10, vimos que la energía potencial gravitatoria entre dos masas M y m separadas entre sí una distancia r es

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

siendo G la constante universal de la gravitación, y habiéndose escogido como punto cero de la energía potencial cuando la separación de las masas es infinita. La energía potencial por unidad de masa cerca de una masa M se denomina *potencial gravitatorio* ϕ:

$$\phi = -\frac{GM}{r} \qquad 34\text{-}38$$

De acuerdo con la teoría general de la relatividad, los relojes marchan más lentamente en las regiones de potencial gravitatorio bajo. (Como el potencial gravitatorio es negativo, como puede verse por la ecuación 34-38, el potencial gravitatorio bajo se presenta cerca de la masa en donde el *valor* del potencial es grande.) Si Δt_1 es un intervalo de tiempo entre dos sucesos medidos por un reloj en donde el potencial gravitatorio es ϕ_1, y Δt_2 es el intervalo entre los mismos sucesos pero medidos por un reloj situado donde el potencial gravitatorio es ϕ_2, la relatividad

(*a*)

(*b*)

(*a*) Esta esfera de cuarzo situada en la parte superior del recipiente es probablemente el objeto del mundo de más perfecta «redondez» o esfericidad. Está proyectada para girar sobre sí misma como un giróscopo en un satélite que orbita alrededor de la Tierra. La relatividad general predice que la rotación de la Tierra hará que el eje de rotación del giróscopo tenga un movimiento de precesión circular con una velocidad angular de aproximadamente 1 revolución cada 100 000 años. (*b*) Este reloj de máser de hidrógeno de extraordinaria exactitud fue lanzado dentro de un satélite en 1976, y sus medidas se comparaban con las de otro reloj idéntico en la Tierra. De acuerdo con lo que predice la teoría general de la relatividad, el reloj en la Tierra, donde el potencial gravitatorio es menor, «perdía» alrededor de $4{,}3 \times 10^{-10}$ s cada segundo en comparación con el reloj que está en el satélite a una altura de alrededor de los 10 000 km.

general predice que la diferencia relativa entre estos tiempos será aproximadamente

$$\frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t} = \frac{1}{c^2}(\phi_2 - \phi_1) \qquad 34\text{-}39$$

(Como normalmente este desplazamiento es muy pequeño, carece de importancia el intervalo por el que se divida el primer miembro de la ecuación.) Por tanto, un reloj situado en una región de potencial gravitatorio bajo irá más despacio que uno situado en un lugar de potencial elevado. Como se puede considerar a un átomo en vibración como un reloj, la frecuencia de vibración en una región de potencial bajo, como cerca del Sol, será inferior que la del mismo átomo situado sobre la Tierra. Este desplazamiento hacia las frecuencias bajas y por tanto hacia longitudes de onda largas recibe el nombre de **desplazamiento gravitatorio hacia el rojo**.

Como ejemplo final de las predicciones de la teoría general, mencionaremos los **agujeros negros**, predichos por primera vez por Oppenheimer y Snyder en 1939. De acuerdo con la teoría general de la relatividad, si la densidad de un objeto como una estrella es suficientemente grande, la atracción gravitatoria es tan enorme que una vez dentro del radio crítico, nada puede escapar a su acción, ni siquiera la luz o la radiación electromagnética. (El efecto que produce un agujero negro sobre los objetos que se encuentran fuera del radio crítico es el mismo que el de cualquier otra masa.) Una de las características de un objeto de este tipo es que nada de lo que ocurre en su interior puede ser comunicado al mundo exterior. Como ocurre con cierta frecuencia en física, un cálculo simple aunque incorrecto, permite calcular los valores correctos para la relación entre la masa y el radio crítico de un agujero negro. En mecánica newtoniana, el valor de la velocidad necesaria para que una partícula escape de la superficie de un planeta o estrella de masa M y radio R viene dada por la ecuación 10-24:

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Si hacemos la velocidad de escape igual a la velocidad de la luz y despejamos el radio, obtenemos el radio crítico R_S, llamado **radio de Schwarzschild**:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \qquad 34\text{-}40$$

Para que un objeto de masa igual a la de nuestro Sol fuese un agujero negro, su radio debería ser aproximadamente igual a 3 km. Como un agujero negro no emite radiación y su radio se espera que sea pequeño, la detección de este objeto no es fácil. Lo mejor que podría ocurrir para detectar un agujero negro es que éste fuese compañero de una estrella normal en un sistema binario de estrellas. El agujero negro podría afectar un cierto número de propiedades de su compañero visible. La medida del desplazamiento doppler de la luz procedente de la estrella normal nos permitiría llevar a cabo un cálculo de la masa de su compañero invisible con lo que determinaríamos si es lo suficientemente grande para ser un agujero negro. Actualmente existen varios candidatos excelentes —uno en la constelación Cygnus, uno en la Nube Magellanic, y quizás uno en nuestra propia galaxia— pero esta evidencia no es, por el momento, concluyente.

Esta antena, formada por un cilindro de aluminio de 1400 kg colgada libremente de un cable de acero, fue construida por Joseph Webber, David Zippy y Robert Foward en la Universidad de Maryland para detectar las ondas gravitatorias. En teoría, la antena debería vibrar cuando las ondas de gravedad pasaran por ella.

Resumen

1. La teoría especial de la relatividad está basada en dos postulados de Albert Einstein:

   Postulado 1. No puede detectarse el movimiento absoluto, uniforme.

Postulado 2. La velocidad de la luz es independiente del movimiento del foco. Una implicación importante de ambos postulados es

Postulado 2 (Alternativo). Todos los observadores miden el mismo valor para la velocidad de la luz con independencia del movimiento relativo de los focos y de los observadores.

Todos los demás resultados de la relatividad especial pueden deducirse a partir de estos postulados.

2. El experimento de Michelson-Morley fue un intento de medir la velocidad absoluta de la Tierra comparando la velocidad de la luz en la dirección del movimiento de la Tierra con la que debe poseer en una dirección perpendicular a dicho movimiento. El resultado nulo encontrado para la diferencia de estas velocidades es consistente con los postulados de Einstein.

3. La transformación de Lorentz relaciona las coordenadas x, y y z y el tiempo t de un suceso visto en el sistema de referencia S con las coordenadas x', y' y z' y el tiempo t' del mismo suceso visto en el sistema S', que se está moviendo con velocidad V relativa a S:

$$x=\gamma(x'+Vt') \qquad y=y' \qquad z=z'$$

$$t=\gamma\left(t'+\frac{Vx'}{c^2}\right)$$

en donde

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

La transformación inversa es

$$x'=\gamma(x-Vt) \qquad y'=y \qquad z'=z$$

$$t'=\gamma\left(t-\frac{V_x}{c^2}\right)$$

Las ecuaciones de transformación para las velocidades son

$$u_x=\frac{u'_x+V}{1+Vu'_x/c^2}$$

$$u_y=\frac{u'_y}{\gamma(1+Vu'_x/c^2)}$$

$$u_z=\frac{u'_z}{\gamma(1+Vu'_x/c^2)}$$

Las ecuaciones de transformación inversa de las velocidades son

$$u'_x=\frac{u_x-V}{1-Vu_x/c^2}$$

$$u'_y=\frac{u_y}{\gamma(1-Vu_x/c^2)}$$

$$u'_z=\frac{u_z}{\gamma(1-Vu_x/c^2)}$$

4. El intervalo de tiempo medido entre dos sucesos que se producen en el mismo punto del espacio en un cierto sistema de referencia se denomina tiempo propio. En otro sistema de referencia en el que los sucesos tienen lugar en puntos diferentes, el intervalo de tiempo entre los sucesos mencionados es más largo

en un factor γ. Este resultado se conoce como dilatación del tiempo, mientras que existe un fenómeno relacionado con éste que es la contracción de longitudes. La longitud de un objeto, medida en un sistema en el cual dicho objeto se encuentra en reposo, se denomina su longitud propia L_p. Cuando se mide en otro sistema de referencia, la longitud del objeto es L_p/γ.

5. Dos sucesos que son simultáneos en un sistema de referencia no lo son en otro sistema que se está moviendo respecto al primero. Si dos relojes están sincronizados en el sistema en que se encuentran en reposo, estarán fuera de sincronización en otro sistema. En el sistema en que se están moviendo, el reloj «cazador» adelanta en una cantidad $\Delta t_s = L_p V/c^2$, siendo L_p la distancia propia entre los dos relojes.

6. La cantidad de movimiento o impulso relativista de una partícula está relacionada con su masa y su velocidad por

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

en donde m_0 es la masa en reposo de la partícula.

7. La energía cinética de una partícula viene dada por

$$E_c = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - E_0$$

en donde

$$E_0 = m_0 c^2$$

es la energía en reposo. La energía total es

$$E = E_c + E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

La velocidad de una partícula está relacionada con su cantidad de movimiento y con su energía total por

$$\frac{u}{c} = \frac{pc}{E}$$

La energía total está relacionada con la cantidad de movimiento y la energía en reposo por

$$E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$$

Cuando se trata de partículas con energías mucho mayores que sus energías en reposo, una aproximación útil es

$$E \approx pc \qquad \text{para } E \gg m_0 c^2$$

Esta ecuación es exacta para el caso de partículas con masa en reposo nula, como los fotones.

8. La masa en reposo total de sistemas de partículas ligadas, como los núcleos y los átomos, es menor que la suma de las masas en reposo de las partículas que constituyen el sistema. La diferencia de masas multiplicada por c^2 es igual a la energía de enlace del sistema. La energía de enlace es la energía que debe adicionarse para descomponer el sistema en sus partes. Las energías de enlace de los electrones en los átomos son del orden de los eV o de los keV, lo que equivale a una diferencia despreciable de las masas en reposo. Las energías de enlace en los núcleos es del orden de varios MeV, y la diferencia de masas en reposo es observable.

9. La base de la teoría general de la relatividad es el principio de equivalencia: Un campo gravitatorio homogéneo es completamente equivalente a un sistema de referencia uniformemente acelerado. Algunas de las consecuencias importantes de esta teoría son la curvatura de la luz en un campo gravitatorio, la predicción de la precesión del perihelio de la órbita de Mercurio, el desplazamiento gravitatorio hacia el rojo y probablemente la existencia de agujeros negros.

Sugerencias bibliográficas

Bondi, Hermann: *Relativity and Common Sense: A New Approach to Einstein*, Doubleday, Garden City, Nueva York, 1964.

Este libro muestra cómo ciertos fenómenos familiares ayudan a ver lo lógico y sencillo que es comprender las ideas de la teoría especial de la relatividad.

Chafee, Frederick H., Jr.: «The Discovery of a Gravitational Lens», *Scientific American*, noviembre 1980, pág. 70.

La relatividad general predice que la luz debe ser desviada por concentraciones de materia. Este artículo describe cómo una galaxia elíptica puede actuar como una lente gigante en el espacio.

Gamow, George: «Gravity», *Scientific American*, marzo 1961, pág. 94.

Se explica la teoría general de la relatividad de Einstein de una forma entretenida y sin matemáticas.

Goldberg, Stanley: *Understanding Relativity: Origin and Impact of a Scientific Revolution*, Birkhaeuser, Boston, 1984.

En este libro se examina el contexto intelectual y social en que creció la teoría especial de Einstein y su aceptación inicial por las comunidades de científicos de cuatro países.

MacKeown, P.K.: «Gravity is Geometry», *The Physics Teacher*, vol. 22, 1984, pág. 557.

Este artículo es una exposición breve pero excelente de las ideas de la relatividad general.

Marder, L.: *Time and the Space Traveller*, George Allen and Unwin, Ltd., Londres, 1971.

Este libro presenta algunos de los argumentos que se han hecho en el largo y variado debate acerca de la paradoja de los gemelos. También examina algunas de las limitaciones prácticas de los viajes espaciales, las implicaciones de la dilatación del tiempo para el viajero espacial en distancias largas y la naturaleza de los relojes vivientes.

Mook, Delo E. y Thomas Vargish: *Inside Relativity*, Princeton University Press, Princeton, 1987.

Es un libro para no científicos escrito por dos profesores, uno que trabaja en las ciencias físicas y el otro en humanidades. Proporciona un contexto histórico y científico para el trabajo de Einstein y explica las teorías especial y general con ayuda de dibujos y gráficos, pero sin matemáticas.

Schwinger, Julian: *Einstein's Legacy: The Unity of Space and Time*, Scientific American Books, Inc., Nueva York, 1986.

Exposición moderna y bien ilustrada de las teorías especial y general de la relatividad, y algunas de sus consecuencias.

Shankland, R.S.: «The Michelson-Morley Experiment», *Scientific American*, noviembre 1964, pág. 107.

Este artículo sitúa el experimento en su contexto histórico y considera su influencia sobre el desarrollo de la teoría de la relatividad.

Will, Clifford M.: *Was Einstein Right?: Putting General Relativity to the Test*, Basic Books, Inc., Nueva York, 1986.

Alrededor de 1960, nuevos descubrimientos en astronomía motivaron un renovado interés en comprobar experimentalmente las predicciones de la teoría de la relatividad general. Este libro, escrito por un físico que empezó su trabajo profesional durante este «renacimiento» de la relatividad, describe con gran entusiasmo los ensayos o tests de comprobación realizados.

Revisión

A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo deben poseerse los siguientes conocimientos:

1. Poder discutir el significado y los resultados del experimento de Michelson-Morley.

2. Ser capaz de enunciar los postulados de Einstein de la relatividad especial.

3. Poder utilizar la transformación de Lorentz para deducir expresiones que den la dilatación del tiempo y la contracción de longitudes, y para resolver problemas en los que se comparen intervalos espaciales y temporales en diferentes sistemas de referencia.

4. Poder discutir la falta de sincronización de relojes en sistemas de referencia móviles.

5. Poder discutir la paradoja de los gemelos.

6. Ser capaz de enunciar la definición de cantidad de movimiento relativista y las ecuaciones que relacionan la energía cinética y la energía cinética total de una partícula con su velocidad.

7. Ser capaz de discutir la relación entre masa y energía en la relatividad especial y de calcular la energía de diferentes sistemas a partir de las masas en reposo de sus constituyentes.

8. Ser capaz de enunciar el principio de equivalencia y de discutir tres de las predicciones que de él se derivan.

B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Sistema de referencia
Sistema de referencia inercial
Relatividad newtoniana
Éter
Experimento de Michelson-Morley
Postulados de Einstein
Transformación de Galileo
Transformación de Lorentz

Tiempo propio
Dilatación del tiempo
Contracción de longitudes
Longitud propia
Contracción de Lorentz-FitzGerald
Relojes sincronizados
Simultaneidad
Desplazamiento hacia el rojo
Paradoja de los gemelos
Cantidad de movimiento relativista
Masa relativista
Masa en reposo
Energía en reposo
Energía relativista
Energía de enlace
Principio de equivalencia
Desplazamiento gravitatorio hacia el rojo
Agujero negro
Radio de Schwarzschild

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa, dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia.

2. El tiempo propio es el intervalo de tiempo más corto entre dos sucesos.

3. El movimiento absoluto puede determinarse mediante la contracción de longitudes.

4. El año-luz es una unidad de distancia.

5. Los sucesos simultáneos deben ocurrir en el mismo lugar.

6. Si dos sucesos no son simultáneos en un sistema de referencia, no pueden ser simultáneos en ningún otro sistema.

7. Si dos partículas están estrechamente ligadas mediante fuerzas atractivas intensas, la masa del sistema es menor que la suma de las masas de las partículas individuales cuando se encuentran separadas.

Problemas

Nivel I

34-1 Relatividad newtoniana

No se proponen problemas para esta sección.

34-2 El experimento de Michelson-Morley

1. En una serie de medidas de velocidad de la luz, Michelson utilizó una longitud de trayecto para el recorrido de la luz, L, de 27,4 km (22 mi). (*a*) ¿Cuál es el tiempo que necesita la luz para hacer el recorrido de ida y vuelta en una distancia de $2L$? (*b*) ¿Cuál es el término de corrección clásica en segundos en la ecuación 34-1 admitiendo que la velocidad de la Tierra es $v=10^{-4}\,c$? (*c*) A partir de unas 1600 medidas, Michelson dio el resultado correspondiente a la velocidad de la luz como 299 796 ± 4 km/s. ¿Es este experimento lo suficientemente exacto como para ser sensible al término de corrección de la ecuación 34-1?

2. Un avión vuela con velocidad u respecto al aire en reposo desde un punto A a otro B y regresa. Comparar el tiempo necesario para el viaje de ida y vuelta cuando el viento sopla desde A hasta B con velocidad v, respecto al tiempo que emplearía cuando el viento sopla perpendicularmente a la línea AB con velocidad v.

34-3 Postulados de Einstein

No se proponen problemas para esta sección.

34-4 La transformación de Lorentz

3. El período de vida propio de los piones es de $2{,}6\times10^{-8}$ s. Si un haz de estas partículas tiene una velocidad de $0{,}85c$, (*a*) ¿cuál deberá ser el período de vida media cuando se mida en el laboratorio? (*b*) ¿Qué distancia deberán recorrer en valor medio, antes de que se desintegren? (*c*) ¿Cuál será la respuesta a la parte (*b*) si se desprecia la dilatación del tiempo?

4. (*a*) En el sistema de referencia de los piones del problema 3, ¿cuánto ha recorrido el laboratorio en un período de vida típico de $2{,}6\times10^{-8}$ s? (*b*) ¿Cuánto vale esta distancia en el sistema de referencia del laboratorio?

5. El período de vida propio medio de un muón es 2 μs. Un haz de estos muones se está moviendo a $0{,}999c$. (*a*) ¿Cuál es su período de vida medio en el laboratorio? (*b*) ¿Cuánta distancia recorrerán, en valor promedio, antes de desintegrarse?

6. (*a*) En el sistema de referencia del muón del problema 5, ¿qué espacio recorrerá el laboratorio en un período de vida típico de 2 μs? ¿Cuánto vale esta distancia en el sistema de referencia del laboratorio?

7. Una nave espacial de longitud propia 100 m pasa junto a nosotros a velocidad elevada, de forma que medimos 85 m para su longitud. ¿Cuál es su velocidad?

8. Una nave espacial parte de la Tierra hacia la estrella Alfa Centauri, que dista 4 años-luz, moviéndose con una velocidad de $0{,}75c$. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar allí (*a*) según se mediría en la Tierra y (*b*) según mediría un pasajero de la nave?

9. Una nave espacial viaja hacia una estrella alejada a 95 años- luz con una velocidad $2{,}2\times10^{8}$ m/s. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar allí (*a*) según se mediría en la Tierra y (*b*) según mediría un pasajero de la nave?

10. El período de vida medio de un pión que se mueve a velocidad elevada resultar ser, al medirse, de $7{,}5\times10^{-8}$ s, mientras que si se mide en reposo es $2{,}6\times10^{-8}$ s. ¿Con qué velocidad se está moviendo el pión?

11. ¿Con qué velocidad deberá estar moviéndose un muón de modo que su período de vida medio sea 46 μs, si en reposo el período vale 2 μs?

12. Una regla métrica se mueve con velocidad $V=0{,}8c$ respecto al observador en dirección paralela a la regla. (*a*) Hallar la longitud de la regla medida por el observador. (*b*) ¿Cuánto tiempo tarda en pasar la regla delante del observador?

13. ¿Con qué velocidad deberá estar moviéndose una regla métrica respecto al observador en dirección paralela a la misma, si la longitud que mide el observador es 50 cm?

14. Utilizar el desarrollo del binomio (ecuación 34-2) para deducir los resultados siguientes en el caso en que V sea mucho

menor que c, y utilizar los resultados obtenidos cuando sean aplicables en los problemas que siguen:

(a) $\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}$ b) $\frac{1}{\gamma} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}$

(c) $\gamma - 1 \approx 1 - \frac{1}{\gamma} \approx \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}$

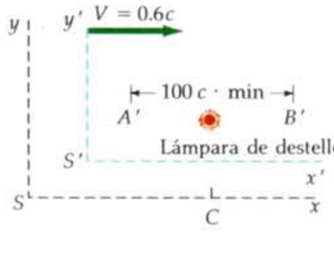
15. Los aviones supersónicos tienen unas velocidades máximas del orden de $(3\times10^{-6})c$. (*a*) ¿En qué porcentaje se verá contraído un avión de este tipo en longitud? (*b*) Durante un tiempo de 1 año$=3{,}15\times10^7$s en el reloj del observador, ¿cuánto tiempo habrá transcurrido en el reloj del piloto? ¿Cuántos minutos se perderán en el reloj del piloto en 1 año del tiempo del observador?

16. ¿Cómo debe ser de grande la velocidad relativa de los observadores para que sus medidas de intervalos de tiempo difieran en el 1 por ciento? (Ver problema 14.)

34-5 Sincronización de relojes y simultaneidad

Los problemas 17 a 21 se refieren al siguiente caso. Un observador en S' marca una distancia L'=100 minutos-c entre los puntos A' y B' y coloca una lámpara de destellos en el punto medio C'. Dispone que la lámpara produzca destellos y que los relojes A' y B' empiecen a marchar con el valor cero cuando la luz procedente de los destellos alcance a los relojes (ver figura 34-21). El sistema S' se mueve hacia la derecha con velocidad 0,6 c respecto a un observador C en S que está en el punto medio entre A' y B' cuando la lámpara lanza un destello y pone su reloj a cero en dicho instante.

Figura 34-21 Problemas 17 a 21.



17. ¿Cuál es la distancia de separación entre los relojes A' y B' de acuerdo con el observador en S?

18. Cuando el pulso luminoso procedente de la lámpara de destellos se mueve hacia A' con velocidad c, A' se mueve hacia C con velocidad $0{,}6c$. Demostrar que el reloj en S lee 25 min cuando el destello alcanza A'. (*Indicación*: En el tiempo t la luz recorre una distancia ct y A' se mueve $0{,}6\ ct$. La suma de estas distancias debe ser igual a la distancia entre A' y la lámpara de destellos según se ve en S.)

19. Demostrar que el reloj en S lee 100 min cuando el destello luminoso alcanza B', que se está moviendo alejándose de C con velocidad $0{,}6c$. (Ver la indicación del problema 18.)

20. El intervalo de tiempo entre la recepción de los destellos a A' y B' en los problemas 18 y 19 es 75 min de acuerdo con el observador en S. ¿Cuánto tiempo ha de esperarse que haya transcurrido en el reloj situado en A' durante estos 75 minutos?

21. El intervalo de tiempo calculado en el problema 20 es la cantidad que el reloj en A' adelanta respecto al de B' de acuerdo con los observadores situados en S. Comparar este resultado con $L_p V/c^2$.

34-6 Efecto Doppler

22. ¿Con qué rapidez deberá moverse un observador hacia una luz roja ($\lambda=650$ nm) para que parezca verde ($\lambda=525$ nm)?

23. Una galaxia distante se está alejando de nosotros con una velocidad de $1{,}85\times10^7$ m/s. Calcular el desplazamiento relativo del rojo $(\lambda' - \lambda_0)/\lambda_0$ en la luz procedente de esta galaxia.

24. Demostrar que V es mucho menor que c, el desplazamiento de frecuencias del efecto doppler viene dado aproximadamente por $\Delta f/f \approx \pm V/c$.

25. Una galaxia distante se está alejando de la Tierra de modo que cada longitud de onda se desplaza en un factor de 2; es decir, $\lambda'=2\lambda_0$. ¿Cuál es la velocidad de la galaxia respecto a la Tierra?

26. Una fuente luminosa que se está acercando a la Tierra con velocidad V emite luz de sodio de 589 nm de longitud de onda. En el sistema de referencia de la Tierra el valor medido es de 620 nm. Hallar V.

27. Un estudiante en la Tierra oye una pieza musical en su radio que parece corresponder a un disco que está girando a mayor velocidad de la prevista. Dispone de un disco de la misma pieza de 33 rev/min y determina que la pieza que escucha en la radio suena igual que cuando hace girar su disco a 78 rev/min, es decir, que las frecuencias son todas más elevadas en un factor de 78/33. Si la pieza se está tocando correctamente, pero la emite con una emisora situada en una nave espacial que se acerca a la Tierra con velocidad V, determinar V.

34-7 Paradoja de los gemelos

28. Un estudiante tiene un amigo de su misma edad que está viajando a $0{,}999c$ hacia una estrella situada a 15 años-luz. Permanece a 10 años en uno de los planetas de la estrella y luego regresa a $0{,}999c$. ¿Cuánto tiempo ha permanecido fuera (*a*) si lo mide el estudiante y (*b*) medido por el viajero?

34-8 Transformación de la velocidad

29. Dos naves espaciales se aproximan una a la otra. (*a*) Si la velocidad de cada una de ellas es $0{,}6c$ respecto a la Tierra, ¿cuál es la velocidad de una respecto a la otra? (*b*) Si la velocidad de cada una de ellas respecto a la Tierra es de 30 000 m/s (aproximadamente 100 veces la velocidad del sonido), ¿cuál es la velocidad de una respecto a la otra?

30. Un haz luminoso se mueve a lo largo del eje y' con una velocidad c en el sistema S', que se está moviendo hacia la derecha con velocidad V respecto al sistema S. (*a*) Hallar los componentes x e y de la velocidad del haz de luz en el sistema S. (*b*) Demostrar que el valor de la velocidad del haz de luz en S es c.

31. Una nave espacial se está moviendo hacia el este a una velocidad de $0{,}90c$ respecto a la Tierra. Otra nave espacial se está moviendo hacia el oeste también a una velocidad de $0{,}90c$ respecto a la Tierra. ¿Cuál es la velocidad de una de las naves espaciales respecto a la otra?

32. Una partícula se mueve con velocidad $0{,}8c$ a lo largo del eje x'' del sistema S'' que se mueve con velocidad $0{,}8c$ a lo largo del eje x' respecto al sistema S'. El sistema S' se mueve con velocidad $0{,}8c$ a lo largo del eje x respecto al sistema S.

(*a*) Hallar la velocidad de la partícula respecto al sistema S'. (*b*) Hallar la velocidad de la partícula respecto al sistema S.

34-9 Cantidad de movimiento relativista; 34-10 Energía relativista

33. ¿Cuánta masa en reposo debe convertirse en energía (*a*) para producir 1 J y (*b*) para mantener encendida una lámpara de 100 W durante 10 años?

34. Dibujar un gráfico de la cantidad de movimiento p de una partícula en función de su velocidad u.

35. (*a*) Calcular la energía en reposo de 1 g de polvo. (*b*) Si se pudiese convertir esta energía en energía eléctrica y venderla a 10 centavos de dólar por kilovatio-hora, ¿cuánto dinero se ganaría? (*c*) Si se pudiese aplicar esta energía a una lámpara de 100 W, ¿durante cuánto tiempo permanecería encendida?

36. Hallar el cociente entre la energía total y la energía en reposo de una partícula de masa en reposo m_0 que se mueve con velocidad (*a*) $0{,}1c$ (*b*) $0{,}5c$, (*c*) $0{,}8c$ y (*d*) $0{,}99c$.

37. Un electrón con energía en reposo de 0,511 MeV se mueve con velocidad $u=0{,}2c$. Hallar su energía total, su energía cinética y su cantidad de movimiento.

38. Un muón tiene una energía en reposo de 105,7 MeV. Calcular su masa en reposo en kilogramos.

39. Un protón con energía en reposo de 938 MeV tiene una energía total de 1400 MeV. (*a*) ¿Cuál es su velocidad? (*b*) ¿Cuál es su cantidad de movimiento?

40. La energía total de una partícula es el doble de su energía en reposo. (*a*) Hallar u/c para la partícula. (*b*) Demostrar que su cantidad de movimiento viene dada por $p=\sqrt{3}m_0c$.

41. En el caso de la reacción de fusión del ejemplo 34-11, calcular el número de reacciones por segundo que son necesarias para generar 1 kW de potencia.

42. Utilizando la tabla 34-1, hallar cuánta energía es necesaria para eliminar un neutrón del ^4He, de forma que quede ^3He más el neutrón.

43. Un neutrón libre se desintegra en un protón más un electrón

$$n \rightarrow p+e$$

Utilizar la tabla 34-1 para calcular la energía liberada en este proceso.

44. ¿Cuánta energía se requerirá para acelerar una partícula de masa m_0 desde el reposo hasta las velocidades de (*a*) $0{,}5c$, (*b*) $0{,}9c$, (*c*) $0{,}99c$? Expresar los resultados como múltiplos de la energía en reposo.

45. Si la energía cinética de una partícula es igual a su energía en reposo, ¿qué error se comete al utilizar $p=m_0u$ para su cantidad de movimiento?

46. En una reacción de fusión nuclear se combinan núcleos ^2H para producir ^4He. (*a*) ¿Cuánta energía se libera en esta reacción? (*b*) ¿Cuántas reacciones de este tipo deben tener lugar por segundo para producir 1 kW de potencia?

34-11 Relatividad general

No se proponen problemas para esta sección.

Nivel II

47. Un observador tiene un amigo de su misma edad que viaja a la estrella Alfa Centauri, a 4 años-luz de la Tierra, y regresa inmediatamente. Insiste en que el viaje entero duró 6 años exactamente. ¿Con qué velocidad realizó el viaje?

48. Utilizar las ecuaciones 34-28 y 34-32 para obtener la ecuación $E^2=p^2c^2+m_0^2c^4$.

49. Si un avión vuela a 2000 km/h, ¿durante cuánto tiempo deberá estar volando para que su reloj atrase 1 s debido a la dilatación del tiempo?

50. Utilizar el desarrollo del binomio (ecuación 34-2) y la ecuación 34-34, para demostrar que cuando $pc \ll m_0c^2$, la energía total viene dada aproximadamente por

$$E\approx m_0c^2+\frac{p^2}{2m_0}$$

51. Se coloca un reloj en un satélite que orbita la Tierra con un período de 90 min. ¿En qué intervalo de tiempo diferirá este reloj de otro idéntico en la Tierra al cabo de 1 año? (Suponer que se aplica la relatividad general.)

52. A y B son gemelos. A viaja $0{,}6c$ a Alfa Centauri (que está a 4 años–c de la Tierra, cuando se mide en el sistema de referencia de ésta) y regresa inmediatamente. Cada gemelo envía al otro una señal luminosa cada 0,01 años medido en su propio sistema de referencia. (*a*) ¿A qué ritmo o frecuencia recibirá B las señales cuando A se está alejando? (*b*) ¿Cuántas señales recibirá B a este ritmo? (*c*) ¿Cuántas señales en total recibirá B antes de que A haya regresado? (*d*) ¿Con qué frecuencia recibirá A las señales cuando B se esté alejando de él? (*e*) ¿Cuántas señales recibe A a esta frecuencia? (*f*) ¿Cuántas señales en total son recibidas por A? (*g*) ¿Cuál de los gemelos es más joven al final del viaje y en cuántos años?

53. En el sistema S, del suceso B se produce 2 μs después del suceso A, que ocurre a $\Delta x=1{,}5$ km del suceso A. ¿Con qué velocidad deberá estar moviéndose un observador a lo largo del eje $+x$ de modo que ambos sucesos A y B se verifiquen simultáneamente? ¿Es posible que para algún observador el proceso B preceda al suceso A?

54. Un observador en el sistema S de referencia ve una explosión localizada en $x_1=480$ m. Una segunda explosión se produce 5 μs más tarde en $x_2=1200$ m. En el sistema S', que se está moviendo a lo largo del eje $+x$ con velocidad V, las explosiones se producen en el mismo punto del espacio. ¿Cuál es la diferencia de tiempos entre ambas explosiones, medidos en S'?

55. Una nave espacial interestelar viaja desde la Tierra hasta un sistema estelar lejano a 12 años $-c$ (medidas en el sistema de referencia terrestre). El viaje requiere 15 años, medidos en la nave. (*a*) ¿Cuál es la velocidad de la nave respecto a la Tierra? (*b*) Cuando llega la nave, envía una señal a la Tierra. ¿Cuánto tiempo habrá transcurrido entre la partida de la nave y la llegada de la señal?

56. Demostrar que la velocidad u de una partícula m_0 y energía total E viene dada por

$$\frac{u}{c}=1-\left[\frac{(m_0c^2)^2}{E^2}\right]^{1/2}$$

y que, cuando E es mucho mayor que m_0c^2, esta expresión puede aproximarse por

$$\frac{u}{c}\approx 1-\frac{(m_0c^2)^2}{2E^2}$$

Hallar la velocidad de un electrón con energía cinética de (*b*) 0,51 MeV y (*c*) 10 MeV.

57. Dos naves espaciales, de 100 m de longitud cada una cuando se miden en reposo, viajan una hacia la otra con velocidades de $0{,}85c$ relativas a la Tierra. (*a*) ¿Qué longitud de cada nave medirá un observador terrestre? (*b*) ¿Con qué rapidez se está moviendo cada nave, según los tripulantes de la otra? (*c*) ¿Qué longitud dirán que tiene? (*d*) En el instante $t=0$ en la Tierra, las proas de las naves están juntas al pasar una al lado de la otra. ¿En qué instante estarán juntas sus popas? (*e*) Dibujar un diagrama en el sistema de una de las naves que muestre el paso de la otra nave.

58. En el acelerador lineal de colisión de Stanford, se disparan pequeños paquetes de electrones y positrones unos contra otros. En el sistema de referencia del laboratorio, cada paquete tiene aproximadamente 1 cm de largo y 10 μm de diámetro. En la región de colisión, cada partícula tiene una energía de 50 GeV, y los electrones y los positrones se mueven en sentidos opuestos. (*a*) ¿Qué longitud y qué anchura tiene cada paquete en su propio sistema de referencia? (*b*) ¿Cuál debe ser la longitud propia mínima del acelerador para que un paquete tenga sus dos extremos simultáneamente dentro del acelerador en su propio sistema de referencia? (La longitud real del acelerador es menor de 1000 m.) (*c*) ¿Cuál es la longitud de un paquete de positrones en el sistema de referencia de los paquetes de electrones?

59. Un electrón con energía en reposo de 0,511 MeV tiene una energía total de 5 MeV. (*a*) Hallar su cantidad de movimiento en unidades de MeV/c a partir de la ecuación 33-34. (*b*) Hallar el cociente entre su velocidad u y la velocidad de la luz.

60. La energía en reposo de un protón es próxima a 938 MeV. Su energía cinética es también 938 MeV. Hallar (*a*) su cantidad de movimiento y (*b*) su velocidad.

61. ¿Qué porcentaje de error se comete al utilizar $\frac{1}{2}m_0u^2$ como energía cinética de una partícula si su velocidad es (*a*) $0{,}1c$ y (*b*) $0{,}9c$?

62. Un cohete con longitud propia de 1000 m se mueve en la dirección $+x$ a $0{,}6c$ respecto a un observador en el suelo. Un astronauta situado en la parte trasera del cohete dispara un proyectil hacia la parte delantera del mismo a $0{,}8c$ respecto al cohete. ¿Cuánto tardará el proyectil en alcanzar la proa del cohete (*a*) medido en el sistema del cohete, (*b*) medido en el sistema del suelo y (*c*) medido en el sistema del proyectil?

63. Un cohete con longitud propia de 700 m se está moviendo hacia la derecha con una velocidad $0{,}9c$. Lleva dos relojes, uno en la proa y el otro en la popa que han sido sincronizados en el sistema de referencia del cohete. Un reloj en el suelo y el reloj de proa marcan ambos $t=0$ al pasar uno junto al otro. (*a*) Cuando $t=0$, ¿qué marca el reloj de popa, según aprecia un observador en el suelo? (*b*) Cuando el reloj de popa pasa junto al reloj en el suelo, ¿qué marca el reloj de popa, según aprecia un observador en el suelo? (*c*) ¿Qué señala el reloj de proa, según aprecia el mismo observador? (*d*) ¿Qué señala el reloj de proa visto por un observador en el cohete? (*e*) En el instante $t=1$ h, medido en el cohete, se envía una señal luminosa desde la proa del cohete a un observador situado en el suelo. ¿Qué señala el reloj en el suelo cuando el observador recibe esta señal? (*f*) Cuando el observador en el suelo recibe la señal, envía una señal hacia la proa del cohete. ¿Cuándo se recibirá esta señal en la proa del cohete, visto desde este mismo?

64. Deducir la ecuación 34-24*a* correspondiente a la frecuencia recibida por un observador que se mueve con velocidad V hacia una fuente estacionaria de ondas electromagnéticas.

65. Los sistemas S y S' se mueven relativamente entre sí a lo largo de los ejes x y x'. Sitúan sus relojes en $t=0$ cuando coinciden sus orígenes. En el sistema S, el suceso 1 se produce en $x_1=1{,}0$ años-c y $t_1=1$ año y el suceso 2 en $x_2=2{,}0$ años-c y $t_2=0{,}5$ año. Estos sucesos se verifican simultáneamente en el sistema S'. (*a*) Hallar el valor y la dirección de la velocidad en S' respecto a S. (*b*) ¿En qué instante se producen estos sucesos medidos en S'?

66. Un observador en el sistema S situado en el origen, observa dos destellos de luz de color separados espacialmente por $\Delta x=2400$ m. Primero se produce un destello azul, seguido 5 μs después por un destello rojo. Un observador en S' que se mueve a lo largo del eje x con una velocidad V relativa a S observa también los destellos separados entre sí 5 μs y con una separación de 2400 m, pero se observa primero el destello rojo. Hallar el valor y sentido de V.

67. El Sol radia energía a un ritmo de 4×10^{26} W aproximadamente. Suponer que esta energía se produce por una reacción cuyo resultado neto es la fusión de 4 núcleos de H para formar un núcleo de He, liberándose de 24 MeV por cada núcleo de He formado. Calcular la pérdida de masa en reposo diaria del Sol.

68. Una nave espacial de 10^6 kg está navegando por el espacio cuando súbitamente resulta necesario acelerar. La nave expulsa 10^3 kg de combustible en un tiempo muy corto con una velocidad $c/2$ respecto a la misma. (*a*) Despreciando cualquier variación de la masa en reposo del sistema, calcular la velocidad de la nave en el sistema en que estaba inicialmente en reposo. (*b*) Calcular la velocidad de la nave utilizando la mecánica clásica, newtoniana. (*c*) Utilizar los resultados de (*a*) para estimar la variación de la masa en reposo de la nave.

69. El sistema de referencia S' se está moviendo a lo largo del eje x' a $0{,}6c$ respecto al sistema S. Una partícula está orginalmente en $x'=10$ m para $t'_1=0$ se acelera repentinamente y luego se mueve a una velocidad constante de $c/3$ en el sentido $-x'$ hasta el instante $t'_2=60$ m/c, cuando repentinamente queda en reposo. Según se observa en el sistema S, hallar (*a*) la velocidad de la partícula, (*b*) la distancia y dirección del trayecto seguido por la partícula desde t'_1 a t'_2 y (*c*) el tiempo el cual la partícula se ha estado moviendo.

70. Demostrar que

$$d\left(\frac{m_0u}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)=m_0\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2}du$$

71. Dos protones se aproximan frontalmente a $0{,}5c$ respecto al sistema de referencia S'. (*a*) Calcular la energía cinética total de los protones vistos en el sistema S'. (*b*) Calcular la energía cinética total de los protones vistos en el sistema de referencia S, que se mueve con velocidad $0{,}5c$ respecto a S' de forma que uno de los protones está en reposo.

72. Una partícula de masa en reposo 1 MeV/c^2 y energía cinética 2 MeV choca con una partícula estacionaria de masa en reposo 2 MeV/c^2. Después de la colisión, las partículas quedan adheridas. Hallar (*a*) la velocidad de la primera partícula antes del choque, (*b*) la energía total de la primera partícula antes del choque, (*c*) la cantidad de movimiento total inicial del sistema, (*d*) la energía cinética total después del choque, y (*e*) la masa en reposo del sistema después del choque.

73. El radio de la órbita de una partícula cargada en un campo magnético está relacionado con la cantidad de movimiento de la misma por

$$p=BqR \qquad 34\text{-}41$$

Esta ecuación es válida clásicamente si se hace $p=mu$, y en relatividad si hacemos $p=m_0u/\sqrt{1-u^2/c^2}$. Un electrón con una energía cinética de 1,50 MeV se mueve en una órbita circular perpendicular a un campo magnético uniforme $B=5\times10^{-3}$ T. (*a*) Hallar el radio de la órbita. (*b*) ¿Qué resultado se obtendría si se utilizasen las relaciones clásicas $p=mu$ y $E_c=p^2/2m$?

74. Prescindiendo de la economía y de la política, los físicos proponen construir un acelerador circular a lo largo de la circunferencia terrestre utilizando imanes que curven la trayectoria creando un campo magnético de valor 1,5 T. (*a*) ¿Cuál deberá ser la energía cinética de los protones que orbiten dentro de este campo en una circunferencia de radio R_T? (Ver problema 73.) (*b*) ¿Cuál será el período de rotación de estos protones?

75. En un experimento mental sencillo, Einstein demostró que existe una masa asociada con la radiación electromagnética. Consideremos una caja de longitud L y masa M apoyada sobre una superficie sin rozamiento. En la pared izquierda de la caja existe una fuente luminosa que emite radiación de energía E, que es absorbida en la pared de la derecha de la caja. De acuerdo con la teoría clásica del electromagnetismo, esta radiación transporta una cantidad de movimiento de valor $p=E/c$ (ecuación 29-24). (*a*) Hallar la velocidad de retroceso de la caja de forma que se conserve dicha cantidad de movimiento cuando se emite la luz. (Como p es pequeño y M es grande, se puede utilizar la mecánica clásica.) (*b*) Cuando la luz es absorbida en la pared de la derecha de la caja, ésta se para, de modo que sigue siendo nula la cantidad de movimiento total. Si despreciamos la velocidad extremadamente pequeña de la caja, el tiempo que emplea la luz en atravesar la caja es $\Delta t=L/c$. Hallar la distancia que se ha estado moviendo la caja en este tiempo. (*c*) Demostrar que si el centro de masa del sistema ha de permanecer fijo en el mismo sitio, la radiación debe poseer una masa $m=E/c^2$.

76. Un antiprotón $\bar{p}$ tiene la misma energía en reposo que un protón. Se crea en la reacción $p+p \rightarrow p+p+p+\bar{p}$. En un experimento, los protones que se encuentran en reposo en el laboratorio son bombardeados con protones de energía cinética E_{cL}, que debe ser lo suficientemente grande como para que pueda convertirse una energía cinética igual a $2m_0c^2$ en la energía en reposo de las dos partículas. En el sistema de referencia del laboratorio, la energía cinética total no puede convertirse en energía en reposo debido a la conservación de la cantidad de movimiento. Sin embargo, en el sistema de referencia de cantidad de movimiento cero en el que los dos protones se están moviendo el uno hacia el otro con la misma velocidad u, la energía cinética total puede convertirse en energía en reposo. (*a*) Hallar la velocidad de cada protón u de modo que la energía total cinética en este último sistema de referencia sea $2m_0c^2$. (*b*) Transformar al sistema del laboratorio en el que un protón está en reposo y hallar la velocidad u' del otro protón. (*c*) Demostrar que la energía cinética del protón móvil en el sistema de referencia del laboratorio es $E_{cL}=6m_0c^2$.

Nivel III

77. Una regla tiene una longitud propia L_p y forma un ángulo θ con el eje x en el sistema S. Demostrar que el ángulo θ' formado con el eje x' del sistema S' que se mueve a lo largo del eje $+x$ con velocidad V, es dado por tg $\theta'=\gamma$ tg θ y que la longitud de la regla en S' es

$$L'=L_p\left[\frac{1}{\gamma^2}\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta\right]^{1/2}$$

78. Demostrar que si una partícula se mueve formando un ángulo θ con el eje x y con la velocidad u en el sistema S, se moverá formando un ángulo θ' con el eje x' en S' dado por

$$\operatorname{tg}\theta'=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\gamma\,(\cos\theta-V/u)}$$

en donde el sistema S' se mueve con velocidad V respecto al S.

79. En el caso especial de una partícula que se mueve con velocidad u a lo largo del eje y en S, demostrar que la cantidad de movimiento y la energía en el sistema S' están relacionadas con la cantidad de movimiento y la energía S por las ecuaciones de transformación

$$p_x'=\gamma\left(p_x-\frac{VE}{c^2}\right)\qquad p_y'=p_y\qquad p_z'=p_z$$

$$\frac{E'}{c}=\gamma\left(\frac{E}{c}-\frac{Vp_x}{c^2}\right)$$

Comparar estas ecuaciones con la transformación de Lorentz correspondiente a x', y', z' y t'. Éstas demuestran que las magnitudes p_x, p_y, p_z y E/c se transforman del mismo modo que x, y, z y ct.

80. La ecuación correspondiente a un frente de onda esférico de un pulso luminoso que empieza en el origen en el instante $t=0$, es $x^2+y^2+z^2-(ct)^2=0$. Utilizando las ecuaciones de transformación de Lorentz demostrar que dicho pulso luminoso también tiene un frente de onda esférico en el sistema S' demostrando que $x'^2+y'^2+z'^2-(ct')^2=0$ en S'.

81. En el problema 80 se demostró que la magnitud $x^2+y^2+z^2-(ct)^2$ tiene el mismo valor (0) tanto en S como S'. Dicha magnitud se denomina *invariante*. A partir de los resultados del problema 79, la magnitud $p_x^2+p_y^2+p_z^2-(E/c)^2$ debe ser también invariante. Demostrar que esta magnitud tiene el valor $-m_0c^2$ tanto en el sistema de referencia S como en el S'.

82. Dos sucesos en S están separados por una distancia $D=x_2-x_1$ y un tiempo $T=t_2-t_1$. (*a*) Utilizar las ecuaciones de transformación de Lorentz para demostrar que en el sistema S' móvil con velocidad V respecto al sistema S la separación de tiempos es $t_2'-t_1'=\gamma(T-VD/c^2)$. (*b*) Demostrar que los sucesos pueden ser simultáneos en el sistema S' sólo si D es mayor que cT. (*c*) Si uno de los sucesos es la *causa* del otro, la separación D debe ser menor que cT, puesto que D/c es el tiempo más pequeño que puede tardar una señal en recorrer el espacio que va desde x_1 hasta x_2 en el sistema S. Demostrar que si D es menor que cT, t_2' es mayor que t_1' en todos los sistemas de referencia. Esto demuestra que la causa debe preceder al efecto en todos los sistemas de referencia (admitiendo que lo hace en uno de ellos). (*d*) Suponer que si se pudiese enviar una señal con velocidad $c'>c$ de modo que en el sistema S la causa precediese al efecto en el tiempo $T=D/c'$. Demostrar que entonces existe un sistema de referencia que se mueve con una velocidad V menor que c en la cual el efecto precede a la causa.

83. Dos partículas idénticas poseen la misma masa en reposo m_0. Las dos partículas se acercan entre sí con una velocidad u en un sistema de referencia S. Las partículas chocan inelásticamente con un muelle que se comprime y se cierra (figura 34-22) alcanzando el reposo en S, con su energía cinética inicial transformada en energía potencial. En este problema se pide demostrar que la conservación de la cantidad de movimiento en un sistema de referencia S', en el cual una de las partículas se

encuentra inicialmente en reposo, requiere que la masa total en reposo del sistema después de la colisión sea $2m_0/\sqrt{1 - u^2/c^2}$. (*a*) Demostrar que la velocidad de la partícula que no se encuentra en reposo en el sistema de referecia S' es

$$u' = \frac{2u}{1 + u^2/c^2}$$

utilizar este resultado para demostrar que

$$\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} = \frac{1 - u^2/c^2}{1 + u^2/c^2}$$

(*b*) Demostrar que la cantidad de movimiento inicial en el sistema S' es $p' = 2m_0u/(1 - u^2/c^2)$. (*c*) Después del choque, las dos masas se mueven con velocidad u en el sistema S' (puesto que están en reposo en S). Expresar la cantidad de movimiento total después del choque en S' en función de la masa M_0 del sistema y demostrar que la conservación del movimiento implica que $M_0 = 2m_0/\sqrt{1 - u^2/c^2}$. (*d*) Demostrar que la energía total está conservada en cada sistema de referencia.

84. El plato de un tocadiscos horizontal gira con una velocidad angular ω. Se sitúa un reloj en el centro del plato giratorio y otro a una distancia r del centro. En un sistema de referencia inercial el reloj a la distancia r se mueve con velocidad $u = r\omega$. (*a*) Demostrar que, según la dilatación del tiempo de la relatividad especial, los intervalos de tiempo Δt_0 para el reloj en reposo y Δt_r para el reloj en movimiento están relacionados por

$$\frac{\Delta t_r - \Delta t_0}{\Delta t_0} \approx -\frac{r^2\omega^2}{2c^2} \qquad \text{si } r\omega \ll c$$

(*b*) En un sistema de referencia ligado al plato giratorio, ambos relojes se encuentran en reposo. Demostrar que el reloj a distancia r experimenta una pseudofuerza (centrífuga) $F_r = mr\omega^2$ en este sistema acelerado. Demostrar que ésta es equivalente a una diferencia en potencial gravitatorio entre r y el origen de $\phi_r - \phi_0 = \frac{1}{2} r^2\omega^2$. Utilizar esta diferencia de potencial y la ecuación 34-39 para demostrar que en este sistema la diferencia entre los intervalos de tiempo es la misma que la existente en el sistema inercial.

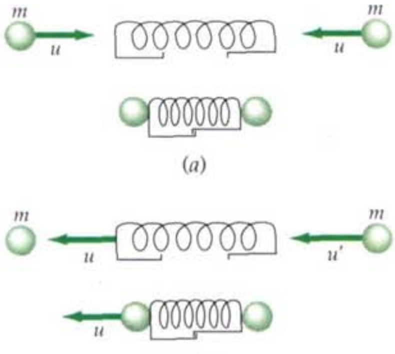


Figura 34-22 Problema 83. Choque inelástico entre dos objetos idénticos (*a*) en el sistema de referencia de centro de masa S o cantidad de movimiento nula y (*b*) en el sistema S', que se está moviendo hacia la derecha con velocidad $V = u$ respecto al sistema S, de modo que una de las partículas está inicialmente en reposo. El muelle, que se supone carece de masa, es simplemente un dispositivo que sirve para hacer patente el almacenamiento de energía potencial.