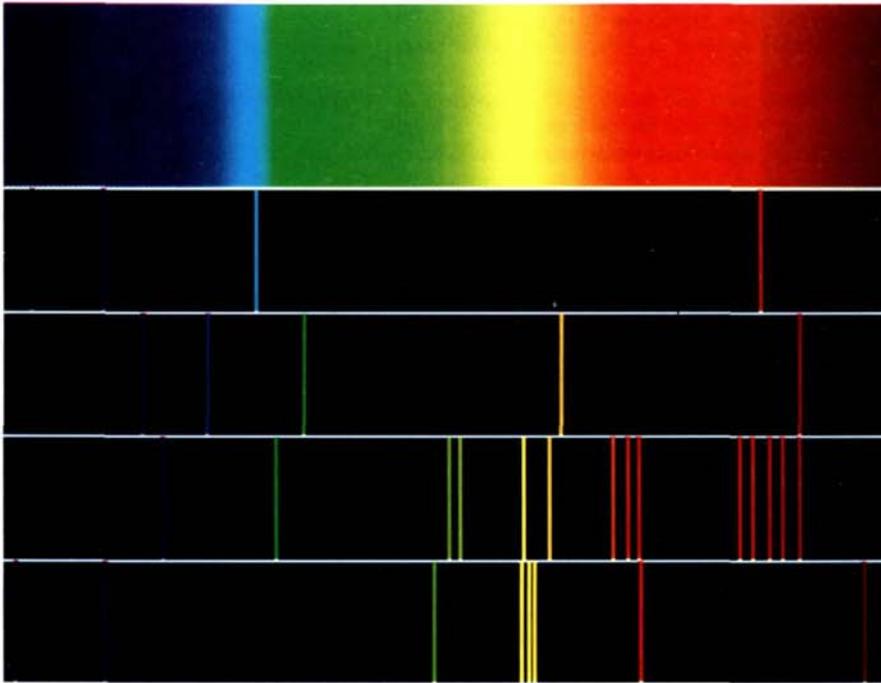


## Capítulo 35

# Los orígenes de la Teoría Cuántica



El espectro visible continuo (*parte superior*) junto con los espectros de líneas características (*de arriba hacia abajo*) emitidos por el hidrógeno, el helio, el sodio, el mercurio, y el bario. El modelo de Niels Bohr del átomo de hidrógeno, que pudo utilizarse para predecir las longitudes de onda del espectro observado del hidrógeno, fue uno de los grandes triunfos de la física del siglo XX y fue un paso muy importante para el desarrollo de nuestra actual comprensión del mundo microscópico.

En el capítulo 34 vimos que las leyes de Newton deben modificarse cuando se aplican a objetos que se mueven a velocidades que son comparables con la velocidad de la luz. En los últimos 20 años del siglo XIX y en los primeros 30 del siglo XX, muchos descubrimientos innovadores, tanto experimentales como teóricos, demostraron que también dejan de cumplirse las leyes de la física clásica cuando se aplican a sistemas microscópicos, como las partículas que constituyen los átomos. Estos fallos son tan drásticos como los de la mecánica newtoniana si se aplica a velocidades elevadas. El interior del átomo sólo puede describirse en función de la *teoría cuántica* (a veces denominada *mecánica cuántica* o *mecánica ondulatoria*), que requiere la modificación de algunas de nuestras ideas fundamentales acerca de la relación existente entre la teoría física y el mundo físico. En la tabla 35-1 se relacionan las fechas aproximadas de algunos experimentos importantes realizados junto con las teorías propuestas para su explicación entre los años 1881 y 1932.

El desarrollo de la teoría cuántica fue muy diferente del seguido por la teoría de la relatividad. En cierto sentido, la relatividad especial fue presentada como una teoría completa en 1905 (y la teoría general en 1916) por un solo científico, Albert Einstein. Mientras que, por el contrario, la teoría cuántica fue desarrollada a lo largo de un período de tiempo largo y por muchos científicos diferentes. Gran parte de los descubrimientos realizados parecían inicialmente sin relación entre sí y no fue hasta finales de la década de los años 1920 que empezó a emerger una teoría consistente. Esta teoría es ahora la base de nuestra comprensión del mundo microscópico. Ha tenido grandes éxitos aunque todavía se sigue deba-

Tabla 35-1 Fechas aproximadas de algunas teorías y experimentos, 1881-1932

1881	Michelson obtiene un resultado nulo para la velocidad absoluta de la Tierra
1884	Balmer halla una fórmula empírica para las líneas espectrales del hidrógeno
1887	Hertz produce ondas electromagnéticas, comprobando la teoría de Maxwell y descubre accidentalmente el efecto fotoeléctrico
1887	Michelson repite su experimento con Morley, obteniendo de nuevo resultados nulos
1895	Röntgen descubre los rayos X
1896	Becquerel descubre la radiactividad nuclear
1897	J.J. Thomson mide el cociente $e/m$ de los rayos catódicos, demostrando que los electrones son constituyentes fundamentales de los átomos.
1900	Planck explica la radiación del cuerpo negro utilizando la cuantización de la energía en la que interviene una nueva constante $h$
1900	Lenard investiga el efecto fotoeléctrico y halla que la energía de los electrones es independiente de la intensidad luminosa
1905	Einstein propone la teoría especial de la relatividad
1905	Einstein explica el efecto fotoeléctrico sugiriendo la cuantización de la radiación
1907	Einstein aplica la cuantización de la energía para explicar la dependencia de las capacidades térmicas de los sólidos con la temperatura
1908	Rydberg y Ritz generalizan la fórmula de Balmer para que se ajuste a los espectros de muchos elementos
1909	El experimento de la gota de aceite de Millikan muestra la cuantización de la carga eléctrica
1911	Rutherford propone el modelo nuclear del átomo basado en los experimentos de Geiger y Marsden de dispersión de partículas alfa
1912	Friedrich y Knipping y von Laue hacen una demostración de la difracción de los rayos X en cristales, comprobando que los rayos X son ondas y que los cristales son estructuras regulares
1913	Bohr propone el modelo del átomo de hidrógeno
1914	Moseley analiza los espectros de rayos X utilizando el modelo de Bohr para explicar la tabla periódica en función del número atómico
1914	Franck y Hertz realizan un experimento demostrando la cuantización de la energía atómica
1915	Duane y Hunt demuestran que el límite de onda corta de los rayos X se determina mediante la teoría cuántica
1916	Wilson y Sommerfeld proponen reglas para la cuantización de los sistemas periódicos
1916	Millikan comprueba la ecuación fotoeléctrica de Einstein
1923	Compton explica la dispersión de los rayos X por los electrones como un choque de un fotón y un electrón y comprueba experimentalmente los resultados
1924	De Broglie propone que las ondas correspondientes a los electrones tienen una longitud de onda $h/p$
1925	Schrödinger desarrolla las matemáticas de la mecánica ondulatoria del electrón
1925	Heisenberg inventa la mecánica matricial
1925	Pauli establece el principio de exclusión
1927	Heisenberg formula el principio de indeterminación
1927	Davisson y Germer observan la difracción de la onda de los electrones en un monocristal
1927	G.P. Thomson observa la difracción de las ondas de los electrones en una lámina metálica
1928	Gamow y Condon y Gurney aplican la mecánica cuántica para explicar los períodos de desintegración alfa
1928	Dirac desarrolla la mecánica cuántica relativista y predice la existencia del positrón
1932	Chadwick descubre el neutrón
1932	Anderson descubre el positrón

tiendo acerca de sus interpretaciones filosóficas. Como sucede con la teoría de la relatividad, la teoría cuántica se reduce a la física clásica cuando se aplica a sistemas macroscópicos (a gran escala), es decir a los objetos de nuestro mundo cotidiano y familiar.

Los orígenes de la teoría cuántica no tuvieron lugar, aunque pueda parecer extraño, en los descubrimientos de la radiactividad o de los rayos X o de los espectros atómicos, sino en la termodinámica. En sus estudios acerca del espectro de radiación del cuerpo negro, Max Planck se dio cuenta de que podía reconciliar la teoría y los experimentos si suponía que la energía radiante se emitía y absorbía no de forma continua, sino en forma de paquetes discretos o cuantos. Fue Einstein el primero que se dio cuenta de que esta cuantización de la energía radiante no era simplemente un truco de cálculo, sino que era realmente una propiedad general de la radiación. Luego Niels Bohr aplicó las ideas de Einstein de la cuantización de la energía a la energía de un átomo, y propuso un modelo del átomo de hidrógeno cuyo éxito a la hora de realizar los cálculos de las longitudes de onda de la radiación emitida por el hidrógeno fue totalmente espectacular. En este capítulo examinaremos cualitativamente los orígenes de la cuantización de la energía.

## 35-1 El origen de la constante cuántica: Radiación del cuerpo negro

Uno de los fenómenos más complejos y enrevesados estudiados al final del siglo pasado fue la distribución espectral de la radiación del cuerpo negro\*. Un cuerpo negro es un sistema ideal que absorbe toda la radiación que incide sobre él. Puede tenerse una muy buena aproximación de un cuerpo negro mediante una cavidad con un orificio muy pequeño, como se ilustra en la figura 35-1. Las características de la radiación en el interior de dicha cavidad depende únicamente de la temperatura de sus paredes. A temperaturas ordinarias (por debajo de unos 600°C), la radiación térmica emitida por un cuerpo negro no es visible porque la energía se concentra en la región infrarroja del espectro electromagnético. Al irse calentando el cuerpo, aumenta la cantidad de energía radiada (de acuerdo con la ley de Stefan-Boltzmann, ecuación 16-21) y la concentración de la energía se desplaza hacia las longitudes de onda más cortas. Entre 600 y 700°C, aparece ya suficiente cantidad de energía en el espectro visible como para que el cuerpo brille con un color rojo oscuro. A temperaturas aún más elevadas, se hace rojo brillante, e incluso «rojo blanco».

La figura 35-2 muestra la potencia radiada por un cuerpo negro en función de la longitud de onda para tres temperaturas diferentes. Se conocen estas curvas con el nombre de curvas de distribución espectral. La magnitud  $P$  en esta figura es la potencia radiada por unidad de longitud de onda. Es una función tanto de la longitud de onda  $\lambda$  como de la temperatura  $T$  y se denomina función de distribución espectral. Esta función  $P(\lambda, T)$  tiene un máximo para una longitud de onda  $\lambda_{\text{máx}}$  que varía de forma inversa con la temperatura de acuerdo con la ley de desplazamiento de Wien (ecuación 16-25) estudiada ya en la sección 16-3:

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{2,898 \text{ mm}\cdot\text{K}}{T}$$

La función de distribución espectral  $P(\lambda, T)$  puede calcularse de una forma directa a partir de la termodinámica clásica, y el resultado obtenido ha de compararse con las curvas obtenidas experimentalmente de la figura 35-2. El resultado del cálculo clásico, conocido como **ley de Rayleigh-Jeans**, es

$$P(\lambda, T) = 8\pi kT \lambda^{-4} \quad 35-1$$

en donde  $k$  es la constante de Boltzmann. Este resultado concuerda con los valores experimentales en la región de longitudes de onda largas, pero está en total desacuerdo cuando se trata de las longitudes de onda cortas. Cuando  $\lambda$  tiende

\* Los cuerpos negros se estudiaron brevemente en la sección 16-3. Parte de dicho estudio se repite ahora.

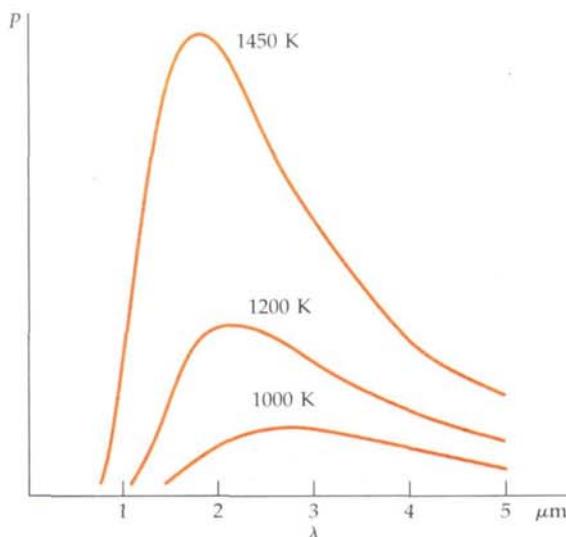


Figura 35-2 Distribución espectral de la radiación desde un cuerpo negro correspondiente a tres temperaturas diferentes.

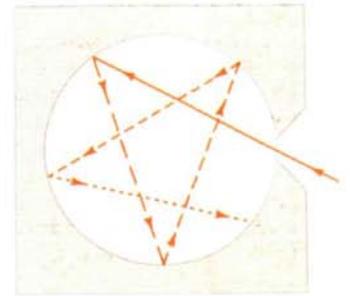


Figura 35-1 Cavidad con la que puede aproximarse un cuerpo negro ideal. La radiación que entra en la cavidad tiene una probabilidad muy pequeña de salir de la misma. Normalmente se absorbe por completo.



Retrato de Max Planck (1858-1947).

a cero el  $P(\lambda, T)$  determinado experimentalmente también tiende a cero, pero la función calculada se acerca a infinito porque es proporcional a  $\lambda^{-4}$ . Así pues, de acuerdo con el cálculo clásico, los cuerpos negros radian una cantidad infinita de energía concentrada en las longitudes de onda muy cortas. Este resultado se conoce como **catástrofe del ultravioleta**.

En 1900, el físico alemán Max Planck anunció que realizando una inusitada modificación en los cálculos clásicos podía deducir una función  $P(\lambda, T)$  que concordaba con los datos experimentales para todas las longitudes de onda. En la figura 35-3 se indica el resultado de Planck junto con los datos experimentales y la ley de Rayleigh-Jeans. Planck encontró en primer lugar una función empírica que ajustaba perfectamente los datos experimentales y luego buscó un procedimiento de modificar el cálculo usual para reobtener su fórmula. Así encontró que podía «deducir» esta función si realizaba la sorprendente hipótesis de que la energía emitida y absorbida por el cuerpo negro no era continua sino que, por el contrario, era emitida o absorbida en paquetes discretos o **cuantos**. Planck dedujo que el tamaño de un cuanto de energía era proporcional a la frecuencia de la radiación:

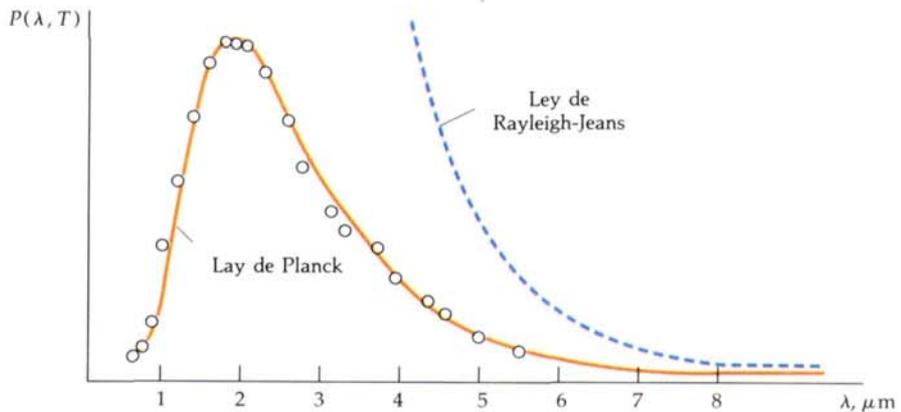
Cuantización de la energía de radiación

$$E = hf \tag{35-2}$$

en donde  $h$  es la constante de proporcionalidad conocida actualmente como **constante de Planck**. Planck determinó el valor de  $h$  ajustando su función a los datos obtenidos experimentalmente. El valor aceptado de esta constante se toma ahora como

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 4,136 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s} \tag{35-3}$$

Figura 35-3 Distribución espectral de la radiación del cuerpo negro en función de la longitud de onda a  $T = 1600 \text{ K}$ . El cálculo teórico clásico de la ley de Rayleigh-Jeans, concuerda con los resultados experimentales a longitudes de onda muy largas, pero difiere totalmente para longitudes de onda cortas.



Planck fue incapaz de encajar la constante  $h$  dentro del esquema de la mecánica clásica. La importancia fundamental de su hipótesis sobre la cuantización de la energía, implicada en la ecuación 35-2, no fue generalmente apreciada hasta que Einstein aplicó ideas semejantes al efecto fotoeléctrico y sugirió que la cuantización es una propiedad fundamental de la radiación electromagnética.

### 35-2 El efecto fotoeléctrico

En 1905, Einstein utilizó la idea de Planck de la cuantización de la energía para explicar el efecto fotoeléctrico. (Su artículo sobre este efecto apareció en la misma revista que había publicado su teoría especial de la relatividad.) El trabajo

de Einstein señaló el principio de la teoría cuántica y por él recibió el Premio Nobel de Física. Mientras que Planck utilizaba la cuantización de la energía en su teoría acerca de la radiación del cuerpo negro como un truco de cálculo, Einstein hizo la atrevida sugerencia de que la cuantización de la energía es una propiedad fundamental de la energía electromagnética. Tres años después, aplicó la idea de la cuantización de la energía a las energías moleculares con objeto de resolver otro misterioso problema de la física — la discrepancia entre los calores específicos calculados a partir del teorema de equipartición y los observados experimentalmente a bajas temperaturas. Posteriormente, las ideas de la cuantización de la energía fueron aplicadas a las energías atómicas por Niels Bohr en la primera explicación satisfactoria de los espectros atómicos.

El efecto fotoeléctrico fue descubierto por Hertz en 1887 y estudiado por Lenard en 1900. La figura 35-4 muestra un diagrama esquemático del aparato básico. Cuando la luz incide sobre una superficie metálica limpia, el cátodo C, se emiten electrones. Si alguno de ellos choca contra el ánodo A, existe una corriente en el circuito externo. El número de electrones emitidos que alcanzan el ánodo puede aumentarse o disminuirse haciendo el ánodo positivo o negativo respecto al cátodo. Sea  $V$  la diferencia de potencial del cátodo al ánodo. La figura 35-5 muestra los valores de la corriente en función de  $V$  para dos valores de la intensidad de la luz que incide sobre el cátodo. Cuando  $V$  es positivo, los electrones son atraídos por el ánodo. Para un valor suficientemente grande de  $V$ , todos los electrones emitidos alcanzan el ánodo y la corriente alcanza su máximo valor. Un aumento adicional de  $V$  no influye en la corriente. Lenard observó que la corriente máxima es proporcional a la intensidad de la luz. Cuando  $V$  es negativo, los electrones son repelidos por el ánodo. Sólo aquellos electrones que tienen una energía cinética inicial  $\frac{1}{2}mv^2$  mayor que  $|eV|$ , pueden alcanzar entonces el ánodo. En la figura 35-5 se ve que si  $V$  es menor que  $-V_0$ , ningún electrón alcanza el ánodo. Dicho potencial  $V_0$  se denomina **potencial de detención** y está relacionado con la energía cinética máxima de los electrones emitidos por

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\max} = eV_0$$

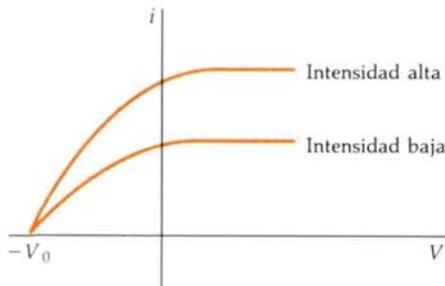


Figura 35-5 Corriente fotoeléctrica  $i$  en función de la tensión  $V$  para dos valores de intensidad luminosa. No hay corriente cuando  $V$  es menor que  $-V_0$ . La corriente de saturación observada para valores grandes de  $V$  es proporcional a la luz incidente.

El resultado experimental de que  $V_0$  es independiente de la intensidad de la luz incidente fue sorprendente. Aparentemente, al aumentar la energía por unidad de tiempo que cae sobre el cátodo no se aumenta la energía cinética máxima de los electrones emitidos. En 1905 Einstein demostró que este resultado experimental puede entenderse si la energía luminosa no está distribuida continuamente en el espacio sino cuantizada en paquetes pequeños llamados **fotones**. La energía de cada fotón es  $hf$ , siendo  $f$  la frecuencia y  $h$  la constante de Planck. Un electrón emitido desde una superficie metálica expuesta a la luz recibe su energía de un solo fotón. Cuando se aumenta la intensidad de la luz de una frecuencia determinada, inciden más fotones sobre la superficie en una unidad de tiempo, pero la energía absorbida por cada electrón resulta inalterada. Si la energía nece-

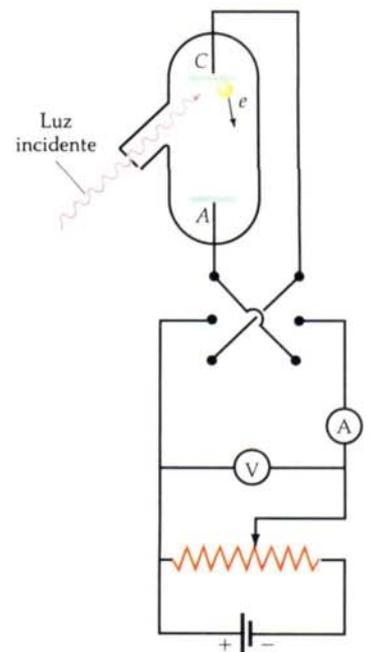


Figura 35-4 Esquema del aparato utilizado para observar el efecto fotoeléctrico. La luz incide en el cátodo C y expulsa electrones. El número de electrones que alcanzan el ánodo A se mide por la corriente que circula por el amperímetro. El ánodo puede hacerse positivo o negativo respecto al cátodo para atraer o repeler los electrones.

saría para que se desprenda un electrón de la superficie de un metal es  $\phi$ , la energía cinética máxima de los electrones emitidos será

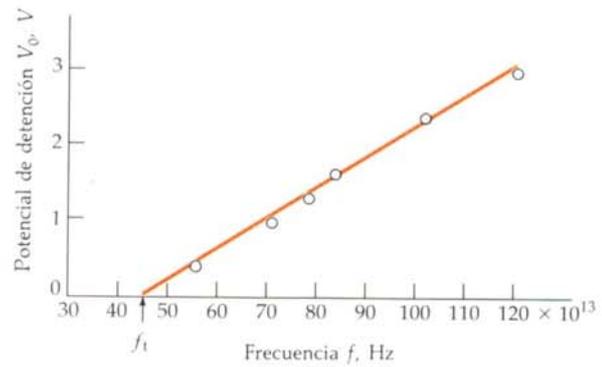
Ecuación fotoeléctrica de Einstein

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\text{máx}} = eV_0 = hf - \phi \tag{35-4}$$

La magnitud  $\phi$ , denominada **función trabajo**, es una característica del metal particular. Algunos electrones tendrán energías cinéticas menores que  $hf - \phi$  debido a la pérdida de energía sufrida al atravesar el metal. La ecuación 35-4 se conoce como **ecuación fotoeléctrica de Einstein**. A partir de ella, vemos que la pendiente de  $V_0$  en función de  $f$  debe ser igual a  $h/e$ .

La ecuación de Einstein fue una anticipación atrevida porque en aquella época no había pruebas de que la constante de Planck tuviese aplicaciones aparte de la radiación electromagnética y no existían datos experimentales sobre la relación existente entre el potencial de detención  $V_0$  y la frecuencia. La comprobación experimental de la teoría de Einstein era muy difícil. Experimentos cuidadosos realizados por Millikan en 1914 y con más detalle en 1916, demostraron que la ecuación de Einstein es correcta y que las medidas de  $h$  coincidían con el valor encontrado por Planck. La figura 35-6 muestra una representación de los datos de Millikan.

Figura 35-6 Datos de Millikan para el potencial de detención  $V_0$  en función de la frecuencia  $f$  para el efecto fotoeléctrico. Los datos caen sobre una recta que tiene una pendiente  $h/e$  según predijo Einstein un decenio antes del experimento.



Los fotones con frecuencias menores que una **frecuencia umbral**  $f_t$ , y por tanto con longitudes de onda mayores que una **longitud de onda umbral**  $\lambda_t$ , no tienen energía suficiente para expulsar un electrón de un metal particular. La frecuencia umbral y la correspondiente longitud de onda umbral, se relacionan con la función trabajo  $\phi$  poniendo la energía cinética máxima de los electrones igual a cero en la ecuación 35-4. Entonces

$$\phi = hf_t = \frac{hc}{\lambda_t} \tag{35-5}$$

Los valores típicos de la función trabajo de los metales son del orden de algunos electrón-voltios. Como las longitudes de onda se dan normalmente en nanómetros y las energías en electrón-voltios, es útil disponer del valor de  $hc$  en electrón-voltios-nanómetros:

$$hc = (4,14 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s})(3 \times 10^8 \text{ m/s}) = 1,24 \times 10^{-6} \text{ eV}\cdot\text{m}$$

o bien

$$hc = 1240 \text{ eV}\cdot\text{nm} \tag{35-6}$$

**Ejemplo 35-1**

Calcular la energía de los fotones correspondientes a la luz de 400 nm de longitud de onda (violeta) y de 700 nm (rojo). Estas longitudes de onda son aproximadamente los valores extremos correspondientes al espectro visible.



Colección de tubos fotomultiplicadores utilizados para detectar luz muy débil. La cara de cada tubo es un área fotosensible que emite electrones, mediante el efecto fotoeléctrico, cuando inciden fotones sobre ella. Cada electrón es acelerado y va a caer sobre un electrodo metálico, dando como resultado la emisión de varios electrones más —los cuales, a su vez, son acelerados e inciden sobre otros electrodos. El haz de electrones crece y se acelera en cascada a lo largo del tubo hasta que llega al ánodo y produce una corriente eléctrica medible.

Utilizando la ecuación 35-2, se tiene

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{400 \text{ nm}} = 3,1 \text{ eV}$$

para  $\lambda = 400 \text{ nm}$ . En el caso en que  $\lambda = 700 \text{ nm}$ , la energía de los fotones es  $4/7$  de la correspondiente a  $\lambda = 400 \text{ nm}$ , o sea  $1,77 \text{ eV}$ . Podemos ver a partir de estos cálculos que la luz visible contiene fotones dentro de un margen que va desde  $1,8$  hasta  $3,0 \text{ eV}$ , aproximadamente.

### Ejemplo 35-2

La intensidad de la luz del Sol en la superficie de la Tierra es aproximadamente  $1400 \text{ W/m}^2$ . Suponiendo que la energía media de los fotones es de  $2 \text{ eV}$  (lo que corresponde a una longitud de onda del orden de  $600 \text{ nm}$ ), calcular el número de fotones que inciden sobre un área de  $1 \text{ cm}^2$  cada segundo.

Como  $1$  vatio es  $1$  julio por segundo, la energía que incide sobre la Tierra en un segundo es  $1400 \text{ J/m}^2$ . La energía por segundo y por centímetro cuadrado es, pues,

$$\frac{1400 \text{ J}}{\text{m}^2} \times \frac{1 \text{ m}^2}{(100 \text{ cm})^2} = 0,14 \text{ J/cm}^2$$

Si  $N$  es el número de fotones de  $2 \text{ eV}$ , que en conjunto tienen una energía total de  $0,14 \text{ J}$ , tendremos

$$\begin{aligned} N(2 \text{ eV}) &= 0,14 \text{ J} \\ N &= \frac{0,14 \text{ J}}{2 \text{ eV}} \times \frac{1 \text{ eV}}{1,6 \times 10^{-19} \text{ J}} \\ &= 4,38 \times 10^{17} \text{ fotones} \end{aligned}$$

Este número es enorme. En la mayoría de los casos ordinarios, el número de los fotones involucrados es tan grande que no se aprecia si hay algunos pocos más o menos. Es decir, la cuantización es inobservable.

**Ejemplo 35-3**

La longitud de onda umbral para el potasio es 564 nm. (a) ¿Cuál es la función de trabajo del potasio? (b) ¿Cuál es el potencial de detención cuando incide sobre este metal luz de 400 nm de longitud de onda?

(a) A partir de la ecuación 35-5, tenemos para la función trabajo

$$\phi = hf_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{564 \text{ nm}} = 2,20 \text{ eV}$$

(b) La energía de un fotón con una longitud de onda de 400 nm fue calculada en el ejemplo 35-1 y valía 3,1 eV. La energía cinética máxima de los electrones emitidos es entonces

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\max} = eV_0 = hf - \phi = 3,10 \text{ eV} - 2,20 \text{ eV} = 0,90 \text{ eV}$$

El potencial de detención es, por tanto, 0,90 V.

**Ejercicio**

Hallar la energía de un fotón correspondiente a la radiación electromagnética en la banda de radio de FM de longitud de onda 3 m. (Respuesta:  $4,13 \times 10^{-7}$  eV)

**Ejercicio**

Hallar la longitud de onda de un fotón cuya energía es (a) 0,1 eV, (b) 1 keV, y (c) 1 MeV. [Respuestas: (a) 12,4  $\mu\text{m}$ , (b) 1,24 nm, (c) 1,24 pm]

Otra interesante característica del efecto fotoeléctrico es la ausencia de cualquier retraso entre el tiempo en que la luz incide sobre el metal por primera vez y el tiempo en que aparece el electrón. En la teoría clásica, conocida la intensidad de la radiación (la potencia por unidad de área), puede calcularse el tiempo que se tarda en que caiga sobre el área cubierta por un átomo la energía necesaria para que sea expulsado un electrón. Sin embargo, aun cuando la intensidad sea tan pequeña que un cálculo de este tipo dé un retraso de horas, no se observa esencialmente ningún retraso. La explicación de este resultado es bien simple. Cuando la intensidad es baja, el número de fotones que inciden sobre el metal por unidad de tiempo es muy pequeño, pero cada fotón tiene energía suficiente como para expulsar un electrón. Por consiguiente, la probabilidad de que un fotón sea absorbido inmediatamente, es muy alta. El cálculo clásico da el número medio correcto de electrones expulsados por unidad de tiempo.

## 35-3 Rayos X

Mientras estaba trabajando con un tubo de rayos catódicos en 1895, W. Röntgen descubrió que ciertos «rayos» procedentes del tubo podían atravesar materiales que eran opacos a la luz y que activaban una pantalla fluorescente o una película fotográfica. Estos rayos se originaban en un punto en donde los electrones del interior del tubo chocaban contra un objeto, o «blanco», dentro del mismo o sobre el propio vidrio del tubo. Röntgen no fue capaz de hacer desviar estos rayos en un campo magnético, como hubiese sido de esperar si estuviese compuesto por partículas cargadas, ni pudo observar difracción o interferencia, como sería de esperar si fuesen ondas. Por consiguiente, les dio el misterioso nombre de **rayos X**. Röntgen investigó exhaustivamente estos rayos y encontró que todos los materiales eran transparentes en mayor o menor grado a los mismos, y que el grado de transparencia decrecía al aumentar la densidad del material. Este hecho condujo a la aplicación médica de los rayos X apenas habían transcurrido unos meses desde que Röntgen publicase sus primeros descubrimientos. Röntgen fue el primero que recibió el Premio Nobel de Física en 1901.

Como la teoría electromagnética clásica predice que las cargas eléctricas deben radiar ondas electromagnéticas cuando se aceleran (o deceleran), fue natural

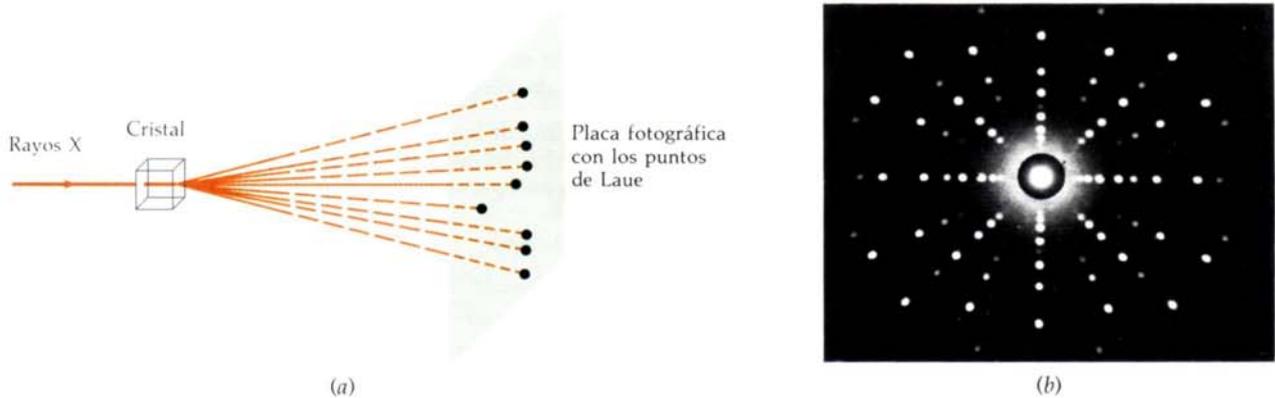


Figura 35-7 (a) Diagrama esquemático del experimento de Laue. El cristal actúa como una red tridimensional que difracta el haz de rayos X y produce un espectro o distribución regular de puntos denominado *diagrama de Laue* sobre una placa fotográfica. (b) Diagrama de difracción moderno de Laue obtenido a través de un cristal de diboruro de niobio con rayos X procedentes de un blanco de molibdeno.

suponer que los rayos X eran ondas electromagnéticas producidas cuando los electrones son decelerados al ser detenidos por un blanco. Algunos años después se observó un ligero ensanchamiento de un haz de rayos X después que pasase a través de rendijas de algunas micras de anchura. Se admitió que esto se debía a la difracción, y entonces se estimó que la longitud de onda de los rayos X debía ser del orden de 0,1 nm. En 1912, M. Laue sugirió que, puesto que las longitudes de onda de los rayos X eran del mismo orden de magnitud que el espaciado de los átomos en un cristal, la disposición regular de los átomos en una red cristalina podía actuar como una red de difracción tridimensional para los rayos X. Animados por esta sugerencia, W. Friedrich y P. Knipping hicieron pasar un haz colimado de rayos X a través de un cristal que luego se hizo incidir sobre una placa fotográfica (figura 35-7a). Además del haz central, observaron una distribución regular de puntos como los indicados en la figura 35-7b. Mediante un análisis de las posiciones de los puntos, fueron capaces de calcular que su haz de rayos X tenía longitudes de onda en el intervalo de entre 0,01 y 0,05 nm aproximadamente. Este importante experimento confirmó dos importantes hipótesis: (1) los rayos X son radiación electromagnética y (2) los átomos del cristal están dispuestos siguiendo una distribución regular.

La figura 35-8 muestra un gráfico de la intensidad en función de la longitud de onda correspondiente al espectro emitido por un tubo de rayos X típico, en el que se bombardea con electrones un blanco adecuado (molibdeno en este caso). El espectro se compone de una serie de líneas agudas que se denomina **espectro característico**, superpuesto a un espectro continuo o **espectro bremsstrahlung** (del alemán «radiación de frenado»). El espectro discontinuo de líneas es característico del material del blanco y varía de un elemento a otro. De modo semejante a como el espectro óptico de los elementos se justifica mediante las transiciones de los electrones atómicos más exteriores, en el espectro característico se involucran las transiciones de los electrones más interiores de los átomos, como se explica en el capítulo 37 de la versión ampliada de esta obra. Por el contrario, el espectro bremsstrahlung continuo se produce debido a la rápida deceleración de los electrones que bombardean el blanco cuando se estrellan materialmente en él. Si la tensión aplicada a lo largo del tubo es  $V$ , la energía cinética máxima de los electrones es  $eV$  cuando inciden sobre el blanco. Es frecuente que se emitan varios fotones durante el proceso de deceleración de un electrón. Sin embargo, a veces se emite precisamente un solo fotón con la energía máxima  $eV$  del electrón. Como la longitud de onda de un fotón varía en razón inversa de su energía ( $\lambda = hc/hf = hc/E$ ), la longitud de onda mínima del espectro bremsstrahlung corresponde a un fotón con la máxima energía  $eV$ . La longitud de onda mínima se denomina **longitud de onda de corte** y se ha denominado  $\lambda_m$  en la figura. La longitud de onda de corte está relacionada con la tensión del tubo de rayos X por

$$\lambda_m = \frac{hc}{E} = \frac{hc}{eV} \tag{35-7}$$

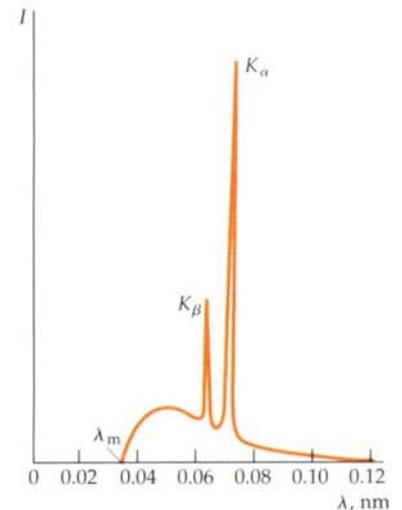


Figura 35-8 Espectro de rayos X del molibdeno. Los picos agudos marcados con  $K_\alpha$  y  $K_\beta$  son característicos del elemento utilizado como blanco. La longitud de onda de corte  $\lambda_m$  es independiente de dicho elemento y está relacionada con la tensión del tubo de rayos X mediante la expresión  $\lambda_m = hc/eV$ .

**Ejemplo 35-4**

¿Cuál es la longitud de onda mínima de los rayos X emitidos por un tubo de televisión con una tensión de 2000 V?

La energía cinética máxima de los electrones es 2000 eV, de modo que ésta será la energía máxima de los fotones del espectro de rayos X. La longitud de onda de un fotón de esta energía es la longitud de onda de corte, que según la ecuación 35-7 vale

$$\lambda_m = \frac{hc}{E} = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{2000 \text{ eV}} = 0,62 \text{ nm}$$

**Ejercicio**

Un tubo de rayos X funciona a un potencial de 30 kV. ¿Cuál es la longitud de onda mínima del espectro de rayos X continuo de este tubo? (Respuesta: 0,041 nm)

### 35-4 Efecto Compton

Una prueba adicional sobre la validez del concepto de fotón la proporcionó Arthur H. Compton, quien midió la dispersión de rayos X por electrones libres. De acuerdo con la teoría clásica, cuando una onda electromagnética de frecuencia  $f_1$  incide sobre un material que contiene cargas, éstas oscilarán con dicha frecuencia y volverán a radiar ondas electromagnéticas de la misma frecuencia. Compton señaló que si se consideraba el proceso de dispersión como un choque entre un fotón y un electrón, este último debería absorber la energía debida al retroceso y el fotón dispersado tendría menos energía y, por lo tanto, menor frecuencia que el fotón incidente.

De acuerdo con la teoría clásica, la energía y la cantidad de movimiento de una onda electromagnética están relacionados por la expresión

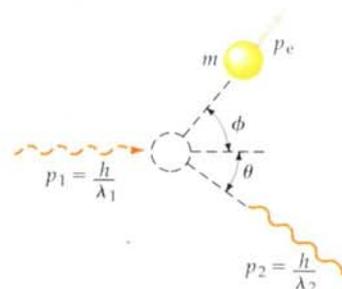
$$E = pc \tag{35-8}$$

Este resultado está de acuerdo con la expresión relativista que relaciona la energía y cantidad de movimiento de una partícula (ecuación 34-34),

$$E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$$

si se admite que la masa  $m$  del fotón es nula. La figura 35-9 muestra la geometría de un proceso de choque entre un fotón de longitud de onda  $\lambda_1$  y un electrón en reposo. Compton relacionó el ángulo de dispersión  $\theta$  con las longitudes de onda incidente y dispersada  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  considerando la dispersión como un problema de mecánica relativista y utilizando la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento. Sea  $\mathbf{p}_1$  la cantidad de movimiento del fotón incidente,  $\mathbf{p}_2$  la del fotón dispersado y  $\mathbf{p}_e$  la del electrón de retroceso. La conservación de la cantidad de movimiento se expresa en la forma

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_e \tag{35-9}$$



**Figura 35-9** Dispersión de Compton de un rayo X por un electrón. El fotón dispersado tiene menos energía y, por tanto, una longitud de onda mayor que el fotón incidente debido a la energía de retroceso del electrón. Se encuentra la variación de longitud de onda a partir de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento.

o bien

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2$$

Multiplicando cada miembro escalarmente por sí mismo, se obtiene

$$p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2$$

o bien

$$p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos \theta \quad 35-10$$

La energía antes del choque es  $p_1 c + mc^2$ , en donde  $mc^2$  es la energía en reposo del electrón. Después de la colisión el electrón tiene una energía  $\sqrt{(mc^2)^2 + p_e^2 c^2}$ . La conservación de la energía nos da entonces

$$p_1 c + mc^2 = p_2 c + \sqrt{(mc^2)^2 + p_e^2 c^2} \quad 35-11$$

Compton eliminó la cantidad de movimiento del electrón  $p_e$  entre las ecuaciones 35-10 y 35-11 y expresó las cantidades de movimiento del fotón en función de las longitudes de onda para obtener una ecuación que relacionara los longitudes de onda incidente y dispersada  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  y el ángulo  $\theta$ . Se dejan como problema (véase problema 60) los detalles algebraicos. El resultado de Compton es

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) \quad 35-12$$

La variación de la longitud de onda es independiente de la longitud de onda original. La magnitud  $h/mc$  depende solamente de la masa del electrón. Tiene dimensiones de una longitud y se denomina **longitud de onda de Compton**. Su valor es

$$\lambda_C = \frac{h}{mc} = \frac{hc}{mc^2} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{5,11 \times 10^5 \text{ eV}} = 2,43 \times 10^{-12} \text{ m} = 2,43 \text{ pm} \quad 35-13$$

Debido a que  $\lambda_2 - \lambda_1$  es pequeño, resulta difícil de observar a menos que  $\lambda_1$  sea tan pequeño que resulte apreciable la variación relativa  $(\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1$ . Compton utilizó rayos X de longitud de onda 71,1 pm. La energía de un fotón de esta longitud de onda es  $E = hc/\lambda = (1240 \text{ eV} \cdot \text{nm})/(0,0711 \text{ nm}) = 17,4 \text{ keV}$ . Como este valor es mucho mayor que la energía de enlace de los electrones de valencia en átomos (el cual es del orden de unos pocos eV), estos electrones pueden considerarse como esencialmente libres. Los resultados experimentales de Compton para  $\lambda_2 - \lambda_1$  en función del ángulo de dispersión  $\theta$  concordaban con la ecuación 35-12, confirmando así la validez del concepto de fotón.

#### Ejemplo 35-5

Calcular la variación porcentual en la longitud de onda observada en una dispersión de Compton de fotones de 20 keV a  $\theta = 60^\circ$ .

La variación de la longitud de onda a  $\theta = 60^\circ$  viene dada por la ecuación 35-12:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_C (1 - \cos \theta) = (2,43 \text{ pm})(1 - \cos 60^\circ) = 1,22 \text{ pm}$$

La longitud de onda de los fotones incidentes de 20 keV es

$$\lambda_1 = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{20\,000 \text{ eV}} = 0,062 \text{ nm} = 62 \text{ pm}$$

Por tanto, la variación en tanto por ciento de la longitud de onda es:

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{1,22 \text{ pm}}{62 \text{ pm}} \times 100 \% = 1,97 \%$$

### 35-5 Cuantización de energías atómicas: Modelo de Bohr

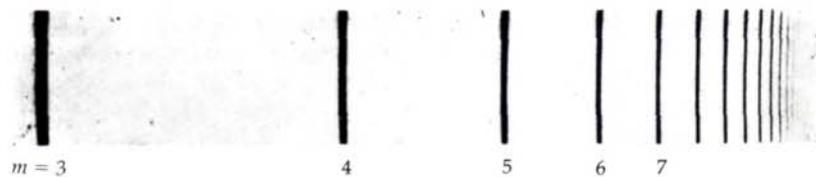
La aplicación más famosa de la cuantización de la energía a sistemas microscópicos fue la que llevó a cabo Niels Bohr, quien propuso en 1913 un modelo del átomo de hidrógeno que tuvo un éxito espectacular al calcular las longitudes de onda de las líneas del espectro conocido del hidrógeno y al predecir nuevas líneas (posteriormente halladas experimentalmente) en el espectro infrarrojo y ultravioleta.

Al final del siglo se habían reunido muchos datos sobre la emisión de la luz por los átomos de un gas al ser excitados por una descarga eléctrica. Observada a través de un espectroscopio con una abertura en forma de rendija estrecha, esta luz adquiere el aspecto de una serie discreta de líneas de diferentes colores o longitudes de onda; la separación e intensidades de las líneas son características de cada elemento. Fue posible determinar las longitudes de onda de estas líneas con exactitud y se había realizado un gran esfuerzo para encontrar regularidades en los espectros. En 1884, un profesor suizo, Johann Balmer, halló que las longitudes de onda de algunas de las líneas del espectro del hidrógeno pueden representarse por la fórmula

$$\lambda = (364,6 \text{ nm}) \frac{m^2}{m^2 - 4} \tag{35-14}$$

en donde  $m$  es un número entero variable que toma los valores  $m = 3, 4, 5, \dots$ . La figura 35-10 muestra el conjunto de líneas espectrales del hidrógeno, conocido ahora como **serie de Balmer**, cuyas longitudes de onda vienen dadas por la ecuación 35-14.

Figura 35-10 Serie de Balmer para la luz emitida desde el hidrógeno. Las longitudes de onda de estas líneas vienen dadas por la ecuación 35-14 para diferentes valores del número entero  $m$ .



Balmer sugirió que su fórmula podría ser un caso especial de una expresión más general aplicable a los espectros de otros elementos. Dicha ecuación, encontrada por Johannes R. Rydberg y Walter Ritz, expresa la longitud de onda de la forma siguiente, conocida como **fórmula de Rydberg-Ritz**,

$$\frac{1}{\lambda} = RZ^2 \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad n_1 > n_2 \tag{35-15}$$

Esta fórmula es válida no sólo para el hidrógeno, de número atómico  $Z=1$ , sino también para átomos más pesados con carga nuclear  $Ze$ , en los cuales todos los electrones excepto uno han sido eliminados.  $R$ , denominada **constante de Rydberg**, o simplemente **Rydberg**, es la misma para todas las series del mismo elemento y varía sólo ligeramente y de modo regular de un elemento a otro. En el caso de elementos de gran masa  $R$  tiende al valor

$$R_\infty = 10,97373 \mu\text{m}^{-1} \tag{35-16}$$

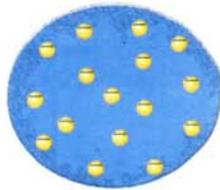
Si tomamos el valor inverso de la ecuación 35-14 para la serie de Balmer, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{364,6 \text{ nm}} \left( \frac{m^2 - 4}{m^2} \right) = \frac{1}{364,6 \text{ nm}} \left( 1 - \frac{4}{m^2} \right) \\ &= \frac{4}{364,6 \text{ nm}} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{m^2} \right) = 10,97 \mu\text{m}^{-1} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2} \right) \end{aligned}$$

Puede verse así que la fórmula de Balmer es realmente un caso especial de la fórmula de Rydberg-Ritz (ecuación 35-15) para el hidrógeno con  $n_2=2$  y  $n_1=m$ .

La fórmula de Rydberg-Ritz y algunas modificaciones de la misma han tenido mucho éxito a la hora de predecir otros espectros. Por ejemplo, fueron previstas y encontradas otras líneas del espectro del hidrógeno que caían fuera del espectro óptico visible. Haciendo  $n_2=1$  en la ecuación 35-15 se obtiene una serie en la región ultravioleta denominada *serie de Lyman*, mientras que si se pone  $n_2=3$  se obtiene la *serie de Paschen*, en la región infrarroja.

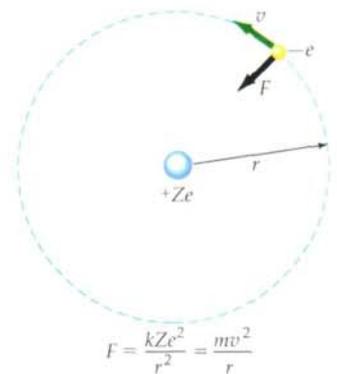
Se hicieron muchos intentos para construir un modelo de átomo que cumpliera con estas fórmulas en su espectro de radiación. El más popular, debido a J.J. Thomson, consideraba diversas distribuciones de electrones embebidos en una cierta clase de fluido que contenía la mayor parte de la masa del átomo y contenía una carga positiva suficiente para hacer que el átomo fuese eléctricamente neutro. El modelo de Thomson, llamado modelo de «budín de pasas», se ilustra en la figura 35-11. Como la teoría electromagnética clásica predecía que una carga que oscila con frecuencia  $f$  debería radiar luz de la misma frecuencia, Thomson buscaba configuraciones de electrones que fuesen estables y tuviesen modos normales de vibración con frecuencias iguales a las del espectro del átomo. Una dificultad existente en este modelo y en todos los demás consistía en que las fuerzas eléctricas solas no pueden producir un equilibrio estable. Thomson no pudo encontrar una configuración de electrones que predijese las frecuencias observadas para cualquier átomo.



**Figura 35-11** Modelo del átomo de J.J. Thomson (denominado a veces modelo de «budín de pasas»). En este modelo los electrones negativos están embebidos en un fluido de carga positiva. Para una configuración determinada de electrones en dicho sistema, pueden calcularse las frecuencias de resonancia de las oscilaciones de los electrones. De acuerdo con la teoría clásica, el átomo radiará luz con una frecuencia igual a la de oscilación de los electrones. Thomson no pudo encontrar ninguna configuración de electrones que diese frecuencias que estuviesen de acuerdo con las frecuencias medidas del espectro de cualquier átomo.

El modelo de Thomson fue descartado después de una serie de experimentos realizados por Geiger y Marsden bajo la supervisión de Rutherford en 1911 y en los cuales, las partículas alfa procedentes del radio radiactivo fueron dispersadas por los átomos de una hoja de oro. Rutherford demostró que el número de partículas alfa dispersadas con ángulos grandes no podía ser justificado por un átomo en el que la carga positiva se distribuyese por todo su volumen atómico (cuyo diámetro conocido era del orden de 0,1 nm), sino que exigía que la carga positiva y la mayor parte de la masa del átomo estuviese concentrada en una región muy pequeña, ahora denominada núcleo, cuyo diámetro es del orden de  $10^{-6}$  nm = 1 fm. (Antes del establecimiento del sistema de medidas SI, el femtómetro, 1 fm =  $10^{-15}$  m, se llamaba un *fermi* en honor del físico italiano Enrico Fermi.)

Niels Bohr, que trabajaba en el laboratorio de Rutherford en aquella época, propuso un modelo de átomo de hidrógeno que combinaba los trabajos de Planck, Einstein y Rutherford y que tuvo éxito al predecir los espectros observados. Bohr supuso que el electrón del átomo de hidrógeno se movía bajo la influencia de la atracción coulombiana del núcleo positivo de acuerdo con la mecánica clásica, que predice órbitas circulares o elípticas cuando las fuerzas son centrales, dirigidas hacia el foco, como sucede en el caso del movimiento de los planetas alrededor del Sol. Para mayor sencillez escogió una órbita circular como se muestra en la figura 35-12. Aunque se obtiene estabilidad mecánica porque la fuerza atractiva de Coulomb proporciona la fuerza centrípeta necesaria para que el electrón permanezca en su órbita, dicho átomo es inestable eléctricamente de acuerdo con la teoría clásica, porque el electrón debe acelerarse cuando se mueve en una circunferencia y, por consiguiente, debe radiar energía electromagnética de una frecuencia igual a la de su movimiento. De acuerdo con dicha teoría clásica electromagnética, este tipo de átomo se destruirá rápidamente, pues el electrón se movería en órbitas en espiral cada vez más cerradas hasta caer sobre el núcleo, según radiaba energía.



**Figura 35-12** Electrón de carga  $-e$  moviéndose en una órbita circular de radio  $r$  alrededor de la carga nuclear  $+Ze$ . La fuerza eléctrica atractiva  $kZe^2/r^2$  proporciona la fuerza centrípeta necesaria para mantener al electrón en su órbita.

Primer postulado de Bohr:  
estados estacionarios

Bohr «resolvió» esta dificultad, modificando las leyes del electromagnetismo y postulando que el electrón puede moverse en ciertas órbitas sin radiar energía y denominó a estas órbitas estables **estados estacionarios**. El átomo radia sólo cuando de una forma u otra realiza una transición de un estado estacionario a otro. La frecuencia de la radiación no es la frecuencia del movimiento en ninguna de las órbitas estables, sino que está relacionada con las energías asociadas a las mismas por la expresión

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} \quad 35-17$$

Segundo postulado de Bohr:  
frecuencia de los fotones a partir  
de la conservación de energía

en donde  $h$  es la constante de Planck y  $E_i$  y  $E_f$  son las energías totales en las órbitas inicial y final. Esta hipótesis, que es equivalente a la de conservación de energía con emisión de un fotón, es básica en la teoría de Bohr, porque se separa de la teoría clásica, que exige que la frecuencia de la radiación sea la del movimiento de la partícula cargada.

Si la carga nuclear es  $+Ze$  y la del electrón  $-e$ , la energía potencial a una distancia  $r$  es (ver ecuación 20-8)

$$U = - \frac{kZe^2}{r}$$

siendo  $k$  la constante de Coulomb. (En el caso del hidrógeno,  $Z=1$ , pero de momento conviene no especificar el valor de  $Z$  para que puedan aplicarse los resultados a otros átomos.) La energía total del electrón móvil en una órbita circular con velocidad  $v$  es entonces

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + U = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{kZe^2}{r}$$

Puede obtenerse la energía cinética en función de  $r$  utilizando la ley de Newton  $F=ma$ . Igualando la fuerza de atracción de Coulomb con el producto de la masa por la aceleración centrípeta se obtiene

$$\frac{kZe^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

o bien

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \frac{kZe^2}{r} \quad 35-18$$

Cuando la órbita es circular la energía cinética vale la mitad de la energía potencial, resultado que es válido en el caso del movimiento circular sometido a un campo de fuerzas inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. La energía total vale entonces

$$E = \frac{1}{2} \frac{kZe^2}{r} - \frac{kZe^2}{r} = - \frac{1}{2} \frac{kZe^2}{r} \quad 35-19$$

Utilizando la ecuación 35-17 para la frecuencia de la radiación cuando el electrón pasa de la órbita 1 de radio  $r_1$  a la órbita 2 de radio  $r_2$ , obtenemos

$$f = \frac{E_1 - E_2}{h} = \frac{1}{2} \frac{kZe^2}{h} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad 35-20$$

Para obtener la fórmula de Rydberg-Ritz,  $f = c/\lambda = cR(1/n_2^2 - 1/n_1^2)$ , es evidente que los radios de las órbitas estables deben ser proporcionales a los cuadrados de números enteros. Bohr buscó una condición cuántica para los radios de las órbitas estables que condujese a este resultado. Después de muchos intentos, vio que se podían obtener resultados correctos si postulaba que en una órbita estable el momento angular del electrón es igual a un número entero multiplicado por

la constante de Planck dividida por  $2\pi$ . Como el momento angular de una órbita circular vale precisamente  $mvr$ , este postulado afirma que

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar \tag{35-21}$$

Tercer postulado de Bohr: momento angular cuantizado

en donde

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

(Suele ser más conveniente utilizar la constante  $\hbar = h/2\pi$ , que se lee «h barra», que la propia  $h$ , del mismo modo que resulta más conveniente utilizar la frecuencia angular  $\omega = 2\pi f$  en lugar de la frecuencia  $f$ .) Podemos determinar  $r$  eliminando  $v$  entre las ecuaciones 35-18 y 35-21. Despejando  $v$  de la ecuación 35-21 y elevando al cuadrado obtenemos, utilizando la ecuación 35-18:

$$v^2 = n^2 \frac{\hbar^2}{m^2 r^2} = \frac{kZe^2}{mr}$$

Despejando  $r$ , se obtiene

$$r = n^2 \frac{\hbar^2}{mkZe^2} = n^2 \frac{a_0}{Z} \tag{35-22}$$

en donde

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2} \approx 0,0529 \text{ nm} \tag{35-23}$$

Radio de Bohr

se denomina primer **radio de Bohr**. Combinando las ecuaciones 35-22 y 35-20 tenemos

$$f = Z^2 \frac{mk^2e^4}{4\pi\hbar^3} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \tag{35-24}$$

Comparando esta expresión para  $f = c/\lambda$  con la fórmula empírica de Rydberg-Ritz (ecuación 35-15) se obtiene para la constante de Rydberg

$$R = \frac{mk^2e^4}{4\pi\hbar^3} \tag{35-25}$$

Utilizando los valores de  $m$ ,  $e$  y  $\hbar$  conocidos en 1913, Bohr calculó  $R$  y halló que su resultado concordaba (dentro de los límites de los errores de las constantes) con el valor obtenido a partir de la espectroscopía. La figura 35-13 ilustra el modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno.

Los valores posibles de la energía del átomo de hidrógeno predichos por el modelo de Bohr vienen dados por la ecuación 35-19, con el valor de  $r$  dado por la ecuación 35-22, son

$$E_n = - \frac{k^2e^4m}{2\hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} = - Z^2 \frac{E_0}{n^2} \tag{35-26}$$

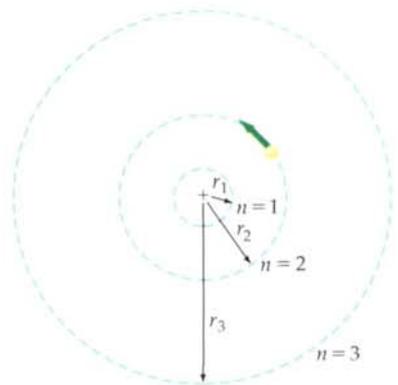


Figura 35-13 Órbitas estables en el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno. Los radios de las órbitas estables vienen dados por  $r_n = n^2 a_0$ , en donde  $n$  es un número entero y  $a_0$  es el radio menor.

en donde

$$E_0 = \frac{k^2e^4m}{2\hbar^2} \approx 13,6 \text{ eV} \tag{35-27}$$

Niveles energéticos

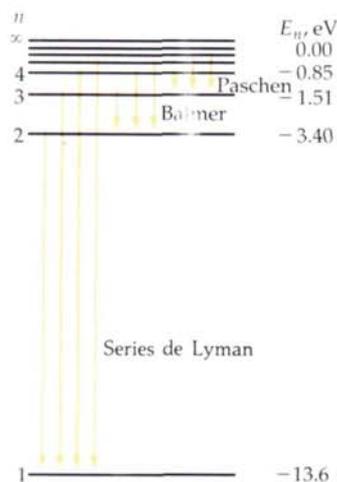


Figura 35-14 Diagrama de niveles energéticos del hidrógeno mostrando algunas transiciones en cada una de las series de Lyman, Balmer y Paschen. Las energías de los niveles vienen dadas por la ecuación 35-26.

Es a veces conveniente representar estas energías en un **diagrama de niveles de energía**, como en la figura 35-14. El nivel más bajo de energía se denomina estado fundamental. La energía del átomo de hidrógeno en el estado fundamental es  $-13,6$  eV. El estado de energía más elevado se alcanza cuando  $n \rightarrow \infty$  o  $r \rightarrow \infty$ , como puede verse a partir de las ecuaciones 35-26 y 35-22. Este proceso de extraer o eliminar el electrón de un átomo se denomina **ionización**. La energía de ionización del átomo de hidrógeno se ha medido y vale  $13,6$  eV. Esta energía es, pues, la que mantiene ligado el electrón al átomo.

Se indican varias series de transiciones radiativas en la figura 35-14 mediante flechas verticales entre los niveles de energía. La frecuencia de la luz emitida en una de estas transiciones es la diferencia de energía dividida por  $h$  (ecuación 35-17). En la época del descubrimiento de Bohr (1913), se conocían la serie de Balmer correspondiente a  $n_2=2$ , y  $n_1=3, 4, 5, \dots$ , y la serie de Paschen correspondiente a  $n_2=3$  y  $n_1=4, 5, 6, \dots$ . En 1916 T. Lyman halló la serie correspondiente a  $n_2=1$ , y en 1922 y 1924, F. Brackett y H. A. Pfund, respectivamente, hallaron las series correspondientes a  $n_2=4$  y  $n_2=5$ . Como puede determinarse calculando las longitudes de onda de estas series, sólo la de Balmer está incluida en la parte visible del espectro electromagnético.

En nuestro estudio hemos supuesto que el electrón gira alrededor de un núcleo estacionario. Esto equivale a suponer que el núcleo tiene una masa infinita. Como la masa del núcleo de hidrógeno no es infinita, sino sólo 2000 veces aproximadamente la del electrón, debe realizarse una corrección para tener en cuenta el movimiento del núcleo. Esta corrección conduce a una dependencia muy pequeña de la constante de Rydberg, dada por la ecuación 35-25, con la masa nuclear, concordando de modo preciso con las variaciones observadas.

### Ejemplo 35-6

Hallar la energía y la longitud de onda de la línea de mayor longitud de la serie de Lyman.

En la figura 35-14, vemos que la serie de Lyman corresponde a transiciones que terminan en el estado fundamental de energía  $E_f = E_1 = -13,6$  eV. Como  $\lambda$  varía de modo inverso a la energía, la transición de longitud de onda más larga es la de menor energía que corresponde a la transición desde el primer estado excitado  $n=2$  hasta el estado fundamental  $n=1$ . El primer estado excitado tiene una energía  $E_2 = (-13,6 \text{ eV})/4 = -3,40$  eV. Como este valor corresponde a  $10,2$  eV por encima del estado fundamental de energía, la energía del fotón emitido es  $10,2$  eV. La longitud de onda de este fotón es

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{10,2 \text{ eV}} = 121,6 \text{ nm}$$

Este fotón está en el ultravioleta, fuera del espectro visible. Como todas las demás líneas de la serie de Lyman poseen energías aún mayores y longitudes de onda más cortas, la serie de Lyman está contenida totalmente en la región del ultravioleta.

### Ejercicio

Hallar la longitud de onda más corta para una línea de la serie de Lyman. (Respuesta:  $91,2$  nm)

### Cuestiones

1. Si un electrón se traslada a una órbita mayor, ¿aumenta o disminuye su energía total? ¿Aumenta o disminuye su energía cinética?
2. ¿Cómo varía la separación de los niveles energéticos adyacentes cuando  $n$  aumenta?
3. ¿Cuál es la energía del fotón de longitud de onda más corta emitido por el átomo de hidrógeno?

## 35-6 Ondas de electrones y Teoría Cuántica

En 1924, un estudiante francés, L. De Broglie, sugirió en su disertación de Licenciatura que los electrones pueden tener propiedades ondulatorias. Su razonamiento se basaba en la simetría de la naturaleza. Como se sabe que la luz tiene propiedades tanto ondulatorias como de partículas, quizás la materia —especialmente los electrones— pueden tener también características ondulatorias y de partículas. Esta sugerencia fue altamente especulativa, porque en esa época no había ninguna prueba de que los electrones tuviesen algún aspecto ondulatorio. Para encontrar la frecuencia y la longitud de onda de las ondas de electrones, De Broglie escogió las ecuaciones

$$f = \frac{E}{h} \quad 35-28$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad 35-29$$

en donde  $p$  es la cantidad de movimiento y  $E$  la energía del electrón. La ecuación 35-28 es la misma que la ecuación de Planck-Einstein correspondiente a la energía de un fotón. La ecuación 35-29 es válida también para los fotones, como puede verse a partir de

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{hf} = \frac{hc}{E}$$

Como la cantidad de movimiento o impulso de un fotón está relacionado con su energía por la expresión  $E = pc$ , tenemos

$$\lambda = \frac{hc}{pc} = \frac{h}{p}$$

Hoy día se considera que las ecuaciones que propuso De Broglie se aplican a toda la materia. Sin embargo, en el caso de objetos macroscópicos, las longitudes de onda calculadas con la ecuación 35-29 son tan pequeñas que es imposible observar las propiedades normales ondulatorias de interferencia y difracción. Incluso una partícula tan pequeña como  $1 \mu\text{g}$  posee una masa demasiado grande como para poder observarse alguna característica ondulatoria, como veremos en el ejemplo siguiente.

### Ejemplo 35-7

Hallar la longitud de onda de De Broglie de una partícula de  $10^{-6}$  g de masa moviéndose con una velocidad de  $10^{-6}$  m/s.

Según la ecuación 35-29, tendremos

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{(10^{-9} \text{ kg})(10^{-6} \text{ m/s})} \\ &= 6,63 \times 10^{-19} \text{ m} \end{aligned}$$

Como la longitud de onda obtenida en el ejemplo anterior es mucho menor que cualquier posible abertura u obstáculo (el diámetro del núcleo de un átomo es del orden de  $10^{-15}$  m, aproximadamente 10 000 veces esta longitud de onda), no puede observarse la difracción ni la interferencia de estas ondas. Como hemos visto, la propagación de ondas de longitud de onda muy pequeña es indistinguible de la propagación de partículas. Obsérvese que la cantidad de movimiento en el ejemplo 35-7 es extremadamente pequeña. Una partícula macroscópica con una cantidad de movimiento mayor tendría una longitud de onda aún más pequeña. Por consiguiente, no se observan las propiedades ondulatorias de objetos macroscópicos del tipo de pelotas de billar o de tenis.

### Ejercicio

Hallar la longitud de onda de De Broglie de una pelota de masa 0,17 kg moviéndose a 100 km/h. (Respuesta:  $1,4 \times 10^{-34}$  m)

La situación es diferente en el caso de electrones de baja energía. Consideremos un electrón con energía cinética  $E_c$ . Si el electrón es no relativista, se obtiene su impulso o cantidad de movimiento a partir de

$$E_c = \frac{p^2}{2m}$$

o bien

$$p = \sqrt{2mE_c}$$

Su longitud de onda es entonces

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2E_c}}$$

Haciendo uso de  $hc = 1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}$  y  $mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$ , se obtiene

$$\lambda = \frac{1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{\sqrt{2(0,511 \times 10^6 \text{ eV}) E_c}}$$

o bien

$$\lambda = \frac{1,226}{\sqrt{E_c}} \text{ nm} \quad E_c \text{ en electrón-voltios} \quad 35-30$$

A partir de esta ecuación, podemos ver que los electrones con energías del orden de decenas de electrón-voltios tienen longitudes de onda de De Broglie del orden de los nanómetros. Este es el orden de magnitud del tamaño de los átomos y del espaciado de los átomos en un cristal. Así pues, cuando inciden sobre un cristal electrones del orden de 10 eV, se ven difundidos de una forma totalmente semejante a como lo hacen los rayos X de la misma longitud de onda.

### Ejercicio

Hallar la longitud de onda de un electrón cuya energía cinética es 10 eV. (Respuesta: 0,388 nm)

La prueba crucial para demostrar la existencia de las propiedades ondulatorias de los electrones fue la observación de la difracción y de la interferencia de las ondas de los electrones. Este test se realizó primeramente de forma accidental en 1927 por C.J. Davisson y L.H. Germer cuando estaban estudiando la dispersión o *scattering* de los electrones en un blanco de níquel en los Laboratorios de la Bell Telephone. Después de calentar el blanco para eliminar un recubrimiento de óxido que se había acumulado durante una interrupción accidental del sistema de vacío, Davisson y Germer encontraron que la intensidad de los electrones dispersados expresada en función del ángulo de dispersión mostraba máximos y mínimos. Su blanco había cristalizado y por accidente habían observado la difracción de los electrones. Entonces prepararon un blanco compuesto por un solo cristal de níquel e investigaron exhaustivamente este fenómeno. En la figura 35-15 se muestra una ilustración de su experimento. Los electrones procedentes de un cañón de electrones se dirigen hacia un cristal y luego se detectan en cierto ángulo  $\phi$  que puede variarse a voluntad. En la figura 35-16 se muestra uno de los diagramas típicos observados, y en él se observa un intenso máximo de dispersión a un ángulo de  $50^\circ$ . El ángulo correspondiente a la intensidad máxima de la dispersión de las ondas por un cristal depende de su longitud de onda y del espaciado de los átomos en el cristal. Utilizando el espaciado conocido de los átomos de su cristal, Davisson y Germer calcularon la longitud de onda que podía producir dicho máximo y encontraron que concordaba con la obtenida a partir de la ecuación de De Broglie (ecuación 35-29) correspondiente a la energía de los electrones que estaban utilizando. Variando la energía de los electrones incidentes, pudieron modificar las longitudes de onda de los electrones y producir máximos y mínimos en diferentes posiciones en los diagramas de difracción. En todos los casos, las longitudes de onda medidas estaban de acuerdo con la hipótesis propuesta por De Broglie.

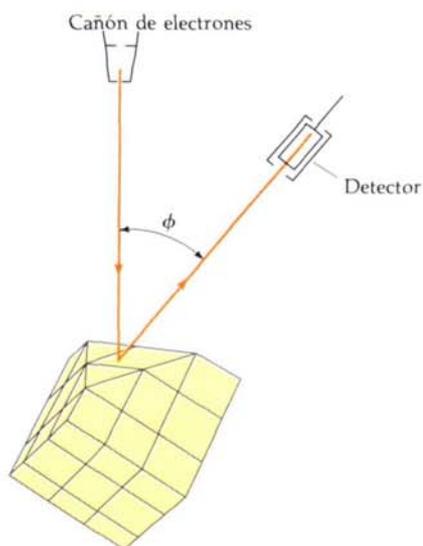


Figura 35-15 Experimento de Davisson-Germer. Los electrones procedentes de un cañón de electrones que inciden sobre un cristal son dispersados hacia un detector en una dirección angular  $\phi$  que puede variarse a voluntad.

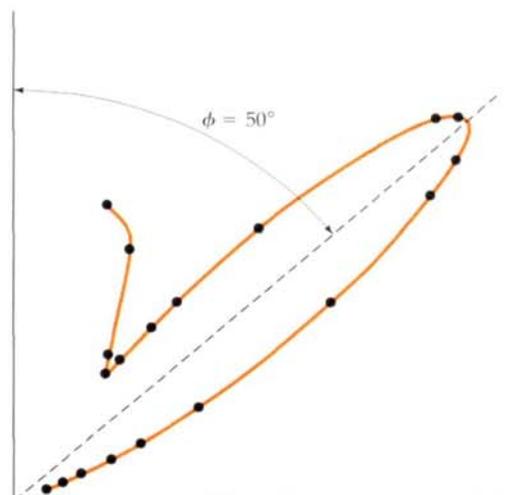


Figura 35-16 Representación gráfica de la intensidad en función del ángulo correspondientes a los electrones dispersados en el experimento de Davisson-Germer. Si se supone que este diagrama corresponde a un proceso de difracción-interferencia, puede calcularse la longitud de onda de los electrones a partir de la separación conocida de los átomos en el cristal y de la posición del máximo. El resultado concuerda con la hipótesis de De Broglie sobre la longitud de onda de un electrón.

En el mismo año, G.P. Thomson (hijo de J.J. Thomson) observó también la difracción de electrones en su transmisión a través de hojas delgadas de metal. Una hoja de metal está compuesta por cristales diminutos orientados al azar. El diagrama de difracción resultante de una hoja de este tipo es un conjunto de circunferencias concéntricas. Desde que Thomson realizó su experimento, se ha observado la difracción correspondiente a los neutrones, protones y otras partículas. La figura 35-17a a c muestra el diagrama de difracción correspondiente a los rayos X, a los electrones y a los neutrones con longitudes de onda semejantes transmitidos a través de hojas delgadas de metal. En la figura 35-17d se ve un diagrama de difracción producido por electrones que inciden sobre dos rendijas estrechas. Este experimento es análogo al famoso experimento de Young de difracción-interferencia por doble rendija con luz. El diagrama es idéntico al que se observa con fotones de la misma longitud de onda.

Poco después de que se demostraran las propiedades ondulatorias del electrón, se sugirió que podían utilizarse éstos en lugar de la luz, para «ver» objetos pequeños. En la actualidad, el microscopio electrónico es una importante herra-

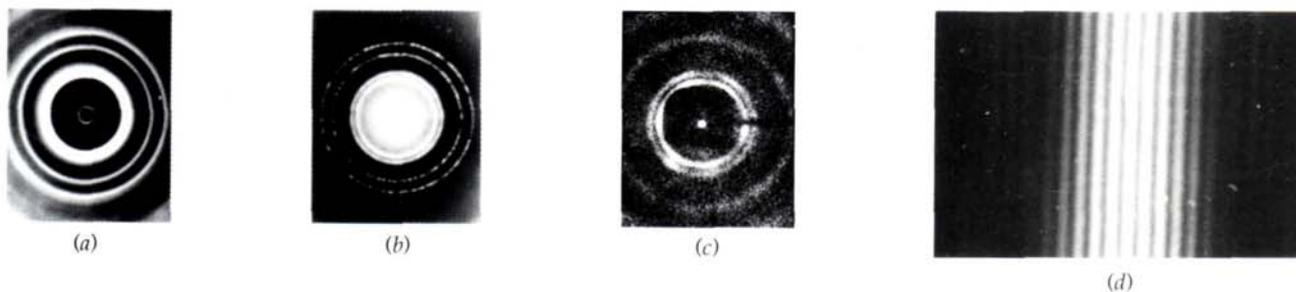


Figura 35-17 Espectro de difracción producido por (a) rayos X y (b) electrones incidentes sobre un blanco que es una hoja de aluminio y (c) neutrones que inciden sobre un blanco de cobre policristalino. Obsérvese la semejanza de los diagramas

producidos. (d) Diagrama de difracción-interferencia producido por electrones en un sistema de doble rendija. Este diagrama es el mismo que el obtenido con fotones.

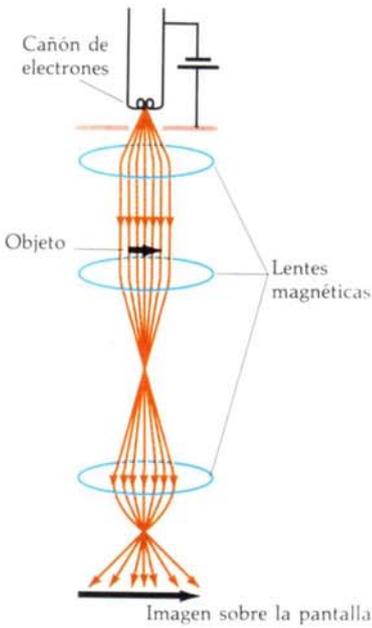


Figura 35-18 Microscopio electrónico. Los electrones procedentes de un filamento caliente (cañón de electrones) se ven acelerados por una gran diferencia de tensión en el tubo. El haz de electrones se hace paralelo mediante lentes de enfoque magnético. Los electrones inciden sobre un blanco muy delgado y luego se enfocan mediante una segunda lente magnética que es equivalente a la lente objetivo de un microscopio ordinario. La tercera lente magnética juega el papel del ocular de un microscopio. Proyecta el haz de electrones sobre una pantalla fluorescente donde se realiza la observación de la imagen.

mienta de investigación. En la figura 35-18 pueden verse las características esenciales de un microscopio de esta clase. El haz de electrones se hace paralelo y se enfoca mediante electroimanes especialmente diseñados que actúan como lentes. La energía de los electrones es típicamente del orden de 100 keV, lo que da como resultado una longitud de onda de 0,004 nm aproximadamente. La muestra que actúa como blanco debe ser muy delgada de modo que el haz transmitido no se frene ni si disperse demasiado. La imagen final se proyecta sobre una pantalla fluorescente o sobre una película. Diversos tipos de distorsiones, que resultan de problemas de enfoque con las lentes magnéticas, limitan la resolución a algunas décimas de nanómetro, valor que es aproximadamente mil veces mejor que los que pueden obtenerse con luz visible.

### Ondas estacionarias y cuantización de la energía

De Broglie señaló que la condición cuántica de Bohr (ecuación 35-21) para el momento angular del electrón de un átomo de hidrógeno es equivalente a una condición de onda estacionaria. Esta condición establece que

$$mvr = n \frac{h}{2\pi}$$

Sustituyendo la cantidad de movimiento  $mv$  por  $h/\lambda$  se tiene

$$\frac{h}{\lambda} r = n \frac{h}{2\pi}$$

o bien

$$n\lambda = 2\pi r = C \tag{35-31}$$

en donde  $C$  es la circunferencia de la órbita de Bohr. Así pues, la condición cuántica de Bohr es equivalente a decir que en la circunferencia de la órbita circular debe ajustarse un número entero de ondas del electrón, como se ve en la figura 35-19.

#### Ejemplo 35-8

La energía cinética del electrón en el estado fundamental (de menor energía) del átomo de hidrógeno es 13,6 eV. (Su energía potencial es  $-27,2$  eV y su energía total es  $-13,6$  eV, lo que lleva a una energía de enlace de 13,6 eV.) Hallar la longitud de onda de De Broglie para este electrón.

Utilizando  $E_c = 13,6$  eV en la ecuación 35-30, se tiene

$$\lambda = \frac{1,226}{\sqrt{13,6}} \text{ nm} = 0,332 \text{ nm} = 2\pi(0,0529 \text{ nm})$$

Esta es la circunferencia de la primera órbita de Bohr del átomo de hidrógeno.

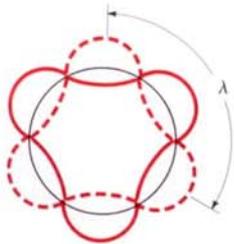


Figura 35-19 Ondas estacionarias a lo largo de una circunferencia.

El ajuste de un número entero de ondas electrónicas en la circunferencia de una órbita de Bohr es semejante al ajuste de un número entero de semilongitudes de onda en la longitud de una cuerda o de un tubo de órgano, como sucede con las ondas estacionarias en cuerdas o en las ondas sonoras. En la teoría ondulatoria clásica, las ondas estacionarias llevan a la cuantización de la frecuencia. Por ejemplo, en el caso de ondas estacionarias en una cuerda de longitud  $L$  que está fija por ambos extremos (figura 35-20), la condición de onda estacionaria es

$$n \frac{\lambda}{2} = L$$

En el caso de ondas que se mueven con velocidad  $v$ , la frecuencia de estas ondas estacionarias sobre una cuerda viene dada entonces por

$$f = \frac{v}{\lambda} = n \frac{v}{2L}$$

Si la energía está asociada con la frecuencia de una onda estacionaria, como en la ecuación 35-28, entonces las ondas estacionarias implican energías cuantizadas.

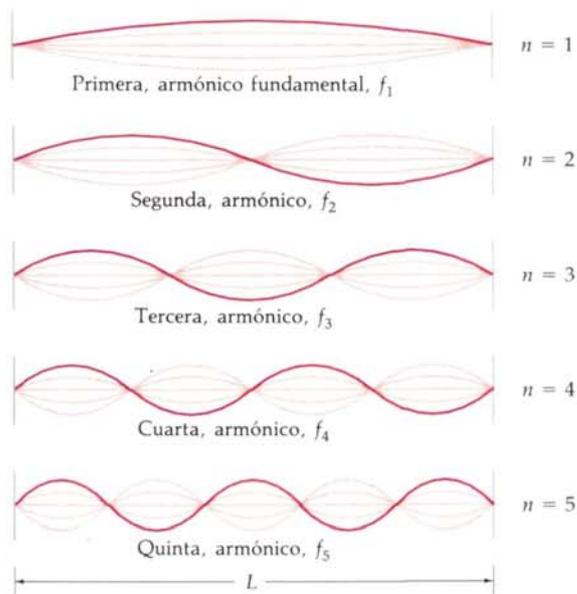


Figura 35-20 Ondas estacionarias en una cuerda fija por ambos extremos. Las frecuencias de estas ondas están cuantizadas; es decir, pueden tener sólo ciertos valores dados por  $f_n = n f_1$ , en donde  $f_1$  es la frecuencia fundamental.

La idea de explicar los estados discretos de energía de la materia mediante ondas estacionarias condujo al desarrollo de una teoría, conocida como **teoría cuántica**, **mecánica cuántica** o **mecánica ondulatoria**. Se describe el electrón mediante una función de onda  $\psi$  que obedece a una ecuación de onda que se parece a la ecuación de onda clásica para el sonido y las ondas luminosas. La frecuencia y longitud de onda de las ondas de los electrones están relacionadas con la energía y la cantidad de movimiento del electrón de la misma forma que la frecuencia y la longitud de onda de la luz están relacionadas con la energía y el impulso de los fotones. Schrödinger resolvió el problema de la onda estacionaria correspondiente al átomo de hidrógeno, al oscilador armónico simple, y a otros sistemas de interés. Así obtuvo que las frecuencias permitidas combinadas con la relación de De Broglie  $E = hf$  conducían al conjunto de niveles de energía correspondiente al átomo de hidrógeno encontrado por Bohr (ecuación 35-26) demostrando, por tanto, que la teoría cuántica proporciona un método general para hallar los niveles energéticos cuantizados de un sistema determinado. La teoría cuántica es la base de nuestro conocimiento y comprensión actual del mundo moderno, desde el comportamiento interno del núcleo atómico hasta el espectro de radiación de las galaxias distantes en cosmología.

## Resumen

1. La energía de la radiación electromagnética no es continua sino que se encuentra en cuantos, con energías dadas por

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

en donde  $f$  es la frecuencia,  $\lambda$  la longitud de onda y  $h$  la constante de Planck, que tiene el valor

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 4,136 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$$

La cantidad  $hc$  aparece frecuentemente en los cálculos y vale

$$hc = 1240 \text{ eV}\cdot\text{nm}$$

La naturaleza cuántica de la luz se muestra claramente en el efecto fotoeléctrico, en donde un átomo absorbe un fotón con la emisión de un electrón, y en el proceso de dispersión Compton, en el cual un fotón choca contra un electrón libre y emerge con su energía reducida y, por tanto, con una mayor longitud de onda.

2. Se emiten rayos X cuando se deceleran los electrones al estrellarse contra un blanco en el interior de un tubo de rayos X. Un espectro de rayos X se compone de una serie de líneas nítidas denominado espectro característico superpuesto al espectro continuo bremsstrahlung. La longitud de onda mínima viene dada entonces por

$$\lambda_m = \frac{hc}{eV}$$

3. Las longitudes de onda de los rayos X son típicamente de algunos nanómetros, lo que coincide aproximadamente con el espaciado de los átomos de un cristal. Se observan máximos de difracción cuando los rayos X son dispersados por cristal, indicándose así que los rayos X son ondas electromagnéticas y que los átomos de un cristal están dispuestos siguiendo una distribución regular.
4. Con objeto de deducir la fórmula de Balmer correspondiente al espectro del átomo de hidrógeno, Bohr propuso los siguientes postulados:

Postulado 1: El electrón del átomo de hidrógeno puede moverse únicamente en ciertas órbitas circulares no radiativas denominadas estados estacionarios.

Postulado 2: El átomo radia un fotón cuando el electrón realiza una transición desde una órbita estacionaria a otra. La frecuencia del fotón viene dada por:

$$f = \frac{E_i - E_f}{h}$$

en donde  $E_i$  y  $E_f$  son las energías inicial y final del átomo.

Postulado 3: El radio (y, por tanto, la energía) de una órbita correspondiente a un estado estacionario queda determinado por la física clásica junto con la condición cuántica de que el momento angular del electrón debe ser igual a un número entero multiplicado por la constante de Planck dividida por  $2\pi$ :

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar$$

en donde  $\hbar = h/2\pi = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ .

Estos postulados exigen que los niveles de energía permitidos en el átomo de hidrógeno vengan dados por

$$E_n = - \frac{k^2 e^4 m}{2h^2} \frac{Z^2}{n^2} = - Z^2 \frac{E_0}{n^2}$$

en donde  $n$  es un número entero y

$$E_0 = \frac{k^2 e^4 m}{2h^2} \approx 13,6 \text{ eV}$$

Los radios de las órbitas estacionarias vienen dados por

$$r = n^2 \frac{h^2}{mkZe^2} = n^2 \frac{a_0}{Z}$$

en donde

$$a_0 = \frac{h^2}{mke^2} \approx 0,0529 \text{ nm}$$

es el primer radio de Bohr.

5. La naturaleza ondulatoria de los electrones fue sugerida por De Broglie, quien postuló las ecuaciones

$$f = \frac{E}{h} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

para la frecuencia y la longitud de onda de las ondas de electrones. Con estas ecuaciones, puede comprenderse la condición cuántica de Bohr como una condición de onda estacionaria. La naturaleza ondulatoria de los electrones fue observada experimentalmente por primera vez por Davisson y Germer y posteriormente por G.P. Thomson, quien midió la difracción e interferencia de los electrones.

6. La teoría matemática de la naturaleza ondulatoria de la materia se conoce como teoría cuántica. En esta teoría, el electrón se describe mediante una función de onda que obedece a una ecuación de onda. La cuantización de la energía surge como consecuencia de la aplicación a los electrones de los diversos sistemas de las condiciones de onda estacionaria. La teoría cuántica es la base para nuestra comprensión de la naturaleza física del mundo moderno.

### Sugerencias bibliográficas

Feinberg, Gerald: «Light», *Scientific American*, setiembre 1968, pág. 50.

*Este artículo constituye una introducción a nuestra presente comprensión de la luz como un fenómeno con propiedades tanto ondulatorias como corpusculares, como se manifiesta por la difracción, la interferencia por dos rendijas, el efecto fotoeléctrico y la radiación del cuerpo negro.*

Moran, Paul R., R. Jerome Nickles, y James A. Zagzebski: «The Physics of Medical Imaging», *Physics Today*, vol. 36, n° 7, 1983, pág. 36.

*Este artículo describe brevemente nuevas técnicas para obtener imágenes médicas, como la angiografía por sustracción digital, la tomografía computarizada (TAC), la resonancia magnética nuclear, la tomografía por emisión de positrones, y la ecografía.*

Wheeler, John Archibald: «Niels Bohr, the Man», *Physics Today*, vol. 38, n° 10, 1985, pág. 66.

*El enfoque muy personal de Bohr sobre la ciencia es vuelto a contar por uno de sus primeros colaboradores, que a su vez es un físico muy reconocido. Este artículo aparece como parte de un número especial de la revista en conmemoración del centenario del nacimiento de Bohr.*

## Revisión

A. Objetivos: Una vez estudiado este capítulo deben poseerse los siguientes conocimientos:

1. Poder dibujar aproximadamente la curva de distribución espectral correspondiente a la radiación del cuerpo negro y la curva predicha por la ley de Rayleigh-Jeans.
2. Poder estudiar el efecto fotoeléctrico y escribir la ecuación de Einstein que lo describe.
3. Poder comentar cómo el concepto de fotón explica todas las características del efecto fotoeléctrico y la dispersión por efecto Compton de los rayos X.
4. Poder dibujar un espectro típico de rayos X y relacionar la longitud de onda mínima del mismo, con la tensión del tubo de rayos X.
5. Poder enunciar los postulados de Bohr y describir el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno.
6. Poder dibujar un diagrama de niveles de energía para el hidrógeno, indicando sobre él las transiciones en que interviene la emisión de un fotón y utilizarlo para calcular las longitudes de onda de los fotones emitidos.
7. Poder enunciar las relaciones de De Broglie para la frecuencia y la longitud de onda de las ondas de los electrones y utilizarlas junto con la condición de onda estacionaria para deducir la condición de Bohr correspondiente a la cuantización del momento angular del átomo de hidrógeno.
8. Poder comentar las pruebas experimentales de la existencia de las ondas de electrones.

B. Definir, explicar o simplemente identificar:

Radiación del cuerpo negro	Fotones
Ley de Rayleigh-Jeans	Función de trabajo
Catástrofe ultravioleta	Ecuación de Einstein
Cuantos	del efecto fotoeléctrico
Constante de Planck	Frecuencia umbral
Efecto fotoeléctrico	Longitud de onda umbral
Potencial de detención	Rayos X

Espectro característico	Estados estacionarios
Espectro bremsstrahlung	Radio de Bohr
Longitud de onda de corte	Diagrama de niveles energéticos
Longitud de onda de Compton	Ionización
Serie de Balmer	Teoría cuántica
Fórmula de Rydberg-Ritz	Mecánica cuántica
Rydberg	Mecánica ondulatoria

C. Verdadero o falso: Si la afirmación es verdadera, explicar por qué lo es. Si es falsa, dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo que contradiga la afirmación.

1. La distribución espectral de la radiación de un cuerpo negro depende únicamente de la temperatura del cuerpo.
2. En el efecto fotoeléctrico, la corriente máxima es proporcional a la intensidad de la luz incidente.
3. La función de trabajo de un metal depende de la frecuencia de la luz incidente.
4. La energía cinética máxima de los electrones emitidos en el efecto fotoeléctrico varía linealmente con la frecuencia de la luz incidente.
5. La energía de un fotón es proporcional a su frecuencia.
6. Una de las hipótesis de Bohr es que los átomos nunca radian luz.
7. En el modelo de Bohr, la energía de un átomo de hidrógeno está cuantizada.
8. En el estado fundamental del átomo de hidrógeno, la energía potencial es  $-27,2$  eV.
9. La longitud de onda de De Broglie de un electrón varía en razón inversa con su cantidad de movimiento o impulso.
10. Los electrones pueden difractarse.
11. Los neutrones pueden difractarse.
12. Un microscopio electrónico se utiliza para examinar electrones.

## Problemas

### Nivel I

#### 35-1 El origen de la constante cuántica: Radiación del cuerpo negro

No se proponen problemas para esta sección.

#### 35-2 El efecto fotoeléctrico

1. Hallar la energía en julios y electrón-voltios de los fotones correspondientes a una onda electromagnética en la banda de radio de FM de frecuencia 100 MHz.
2. Repetir el problema 1 para una onda electromagnética en una banda de radio de AM y frecuencia 900 kHz.
3. ¿Cuál es la frecuencia de un fotón de energía (a) 1 eV, (b) 1 keV y (c) 1 MeV?

4. Hallar la energía de los fotones correspondientes a luz de longitud de onda (a) 450 nm, (b) 550 nm, y (c) 650 nm.
5. Hallar el intervalo de energías de los fotones del espectro visible, que se extiende desde las longitudes de onda de 400 a 700 nm.
6. Hallar la energía de los fotones si la longitud de onda es (a) 0,1 nm (aproximadamente 1 diámetro atómico) y (b) 1 fm ( $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ , aproximadamente un diámetro nuclear).
7. La función de trabajo del tungsteno es 4,58 eV. (a) Hallar la frecuencia umbral y la longitud de onda para el efecto fotoeléctrico. Hallar el potencial de detención si la longitud de onda de la luz incidente es (b) 200 nm y (c) 250 nm.
8. Cuando incide sobre el potasio luz de 300 nm de longitud de onda, los electrones emitidos tienen una energía cinética

máxima de 2,03 eV. (a) ¿Cuál es la energía del fotón incidente? (b) ¿Cuál es la función trabajo del potasio? (c) ¿Cuál sería el potencial de detención si la luz incidente tuviese una longitud de onda de 430 nm? (d) ¿Cuál es la longitud de onda umbral para el efecto fotoeléctrico con el potasio?

9. La longitud de onda umbral de la plata para el efecto fotoeléctrico es 262 nm. (a) Hallar la función trabajo de la plata. (b) Hallar el potencial de detención si la radiación incidente tiene una longitud de onda de 175 nm.

10. La función trabajo del cesio es 1,9 eV. (a) Hallar la frecuencia umbral y la longitud de onda para el efecto fotoeléctrico. Hallar el potencial de detención si la longitud de onda de la luz incidente es (b) 250 nm y (c) 350 nm.

11. Un haz de luz de longitud de onda 400 nm tiene una intensidad de  $100 \text{ W/m}^2$ . (a) ¿Cuál es la energía de cada fotón del haz? (b) ¿Cuánta energía incide sobre un área de  $1 \text{ cm}^2$  perpendicular al haz en 1 s? (c) ¿Cuántos fotones inciden en dicha área en 1 s?

### 35-3 Rayos X

12. Un tubo de rayos X funciona a un potencial de 460 kV. ¿Cuál es la mínima longitud de onda del espectro continuo de rayos X desde este tubo?

13. La longitud de onda mínima del espectro continuo de rayos X desde un tubo de televisión es 0,134 nm. ¿Cuál es la tensión aplicada al tubo?

14. ¿Cuál es la longitud de onda mínima del espectro continuo de rayos X desde un tubo de televisión que funciona a 2500 V?

### 35-4 Efecto Compton

15. Hallar el desplazamiento de la longitud de onda de los fotones dispersados a  $\theta = 60^\circ$ .

16. Cuando los fotones son dispersados por los electrones del carbono, el desplazamiento de la longitud de onda es 0,33 pm. Hallar el ángulo de dispersión.

17. Hallar la cantidad de movimiento de un fotón en eV/c y en kg·m/s si la longitud de onda es (a) 400 nm, (b) 2 nm, (c) 0,1 nm, y (d) 3 cm.

18. La longitud de onda de los fotones dispersados por efecto Compton se mide a  $\theta = 90^\circ$ . Si  $\Delta\lambda/\lambda$  ha de ser el 1,5 por ciento, ¿cuál deberá ser la longitud de onda de los fotones incidentes?

19. Compton utilizó fotones de 0,0711 nm de longitud de onda. (a) ¿Cuál es la energía de estos fotones? (b) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón dispersado a  $\theta = 180^\circ$ ? (c) ¿Cuál es la energía del fotón dispersado a este ángulo?

20. En el caso de los fotones utilizados por Compton, hallar la cantidad de movimiento del fotón incidente y la del fotón dispersado a  $180^\circ$ , y utilizar la conservación de la cantidad de movimiento para hallar la cantidad de movimiento del electrón de retroceso en este experimento (ver problema 19).

### 35-5 Cuantización de energías atómicas: Modelo de Bohr

21. Utilizar los valores conocidos de las constantes de la ecuación 35-22 para demostrar que  $a_0$  vale aproximadamente 0,0529 nm.

22. La longitud de onda más larga de la serie de Lyman se calculó en el ejemplo 35-6. Hallar las longitudes de onda para las transiciones (a)  $n_1 = 3$  a  $n_2 = 1$  y (b)  $n_1 = 4$  a  $n_2 = 1$ . (c) Hallar la longitud de onda más corta en esta serie.

23. Hallar la energía de los fotones correspondientes a las tres longitudes de onda más largas de la serie de Balmer y calcular sus longitudes de onda.

24. (a) Hallar la energía y longitud de onda de los fotones correspondientes al límite de la serie (longitud de onda más corta) en la serie de Paschen ( $n_2 = 3$ ). (b) Calcular las longitudes de onda correspondientes a las tres longitudes de onda más largas de esta serie e indicar sus posiciones sobre una escala horizontal lineal.

25. Repetir el problema 24 para la serie de Brackett ( $n_2 = 4$ ).

26. Un átomo de hidrógeno está en su décimo estado excitado de acuerdo con el modelo de Bohr ( $n = 11$ ). (a) ¿Cuál es la energía cinética del electrón? (d) ¿Cuál es la energía potencial del electrón? (e) ¿Cuál es la energía total del electrón?

### 35-6 Ondas de electrones y Teoría Cuántica

27. Utilizar la ecuación 35-30 para calcular la longitud de onda de De Broglie de un electrón de energía cinética (a) 2,5 eV, (b) 250 eV, (c) 2,5 keV, y (d) 25 keV.

28. Un electrón se está moviendo a  $v = 2,5 \times 10^6 \text{ m/s}$ . Hallar su longitud de onda de De Broglie.

29. Un electrón tiene una longitud de onda de 200 nm. Hallar (a) su cantidad de movimiento y (b) su energía cinética.

30. ¿Con qué potencial debe acelerarse un electrón para que su longitud de onda de De Broglie sea (a) 5 nm y (b) 0,01 nm?

31. Un neutrón térmico en un reactor tiene una energía cinética próxima a 0,02 eV. Calcular su longitud de onda de De Broglie a partir de

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2E_c}}$$

en donde  $mc^2 = 940 \text{ MeV}$  es la energía en reposo del neutrón.

32. Hallar la longitud de onda de De Broglie de un protón (energía en reposo  $mc^2 = 938 \text{ MeV}$ ) que tiene una energía cinética de 2 MeV. (Ver problema 31.)

33. Un protón se está moviendo a  $v = 0,003c$ , siendo  $c$  la velocidad de la luz. Hallar su longitud de onda de De Broglie.

34. ¿Cuál es la energía cinética de un protón cuya longitud de onda de De Broglie es (a) 1 nm y (b) 1 fm?

35. Hallar la longitud de onda de De Broglie de una pelota de 0,145 kg de masa moviéndose a 30 m/s.

36. La energía de un haz de electrones en el experimento de Davisson y Germer era 54 eV. Calcular la longitud de onda de estos electrones.

37. La distancia entre los iones de  $\text{Li}^+$  y  $\text{Cl}^-$  en un cristal de LiCl es 0,257 nm. Hallar la energía de los electrones que tienen longitudes de onda igual a esta distancia.

38. Un microscopio electrónico utiliza electrones de 70 keV de energía. Hallar la longitud de onda de estos electrones.

### Nivel II

39. Un rayo X sufre una dispersión de Compton y emerge con una longitud de onda de 0,20 nm a un ángulo de dispersión de  $100^\circ$ . ¿Cuál era la energía inicial del fotón de rayos X?

40. Cuando la energía cinética de un electrón es mucho mayor que su energía en reposo, es aceptable la aproximación relativista  $E \approx pc$ . (a) Demostrar que en este caso los fotones

y los electrones de la misma energía tienen la misma longitud de onda. (b) Hallar la longitud de onda de De Broglie de un electrón de 200 MeV de energía.

41. Suponer que un foco de 100 W radia luz de 600 nm de longitud de onda uniformemente en todas direcciones, y que el ojo puede detectar esta luz si como mínimo entran 20 fotones por segundo en un ojo adaptado a la oscuridad con una pupila de 7 mm de diámetro. ¿A qué distancia del foco puede detectarse la luz en estas condiciones bastante extremas?

42. Los datos de los potenciales de detención en función de la longitud de onda para el efecto fotoeléctrico utilizando sodio son

$\lambda$ , nm	200	300	400	500	600
$V_0$ , V	4,20	2,06	1,05	0,41	0,03

Representar estos datos de modo que se obtenga una recta y a partir de ella hallar (a) la función trabajo, (b) la frecuencia umbral, y (c) el cociente  $h/e$ .

43. El diámetro de la pupila del ojo es del orden de 5 mm. (Puede variar entre 1 y 8 mm aproximadamente.) Hallar la intensidad de la luz de 600 nm de longitud de onda tal, que sólo entre en el ojo por la pupila 1 fotón por segundo.

44. Demostrar que la velocidad de un electrón en la  $n$ -ésima órbita de Bohr del hidrógeno viene dada por  $v_n = e^2/2\epsilon_0 h n$ .

45. Una lámpara radia 90 W de luz uniformemente en todas direcciones. (a) Hallar la intensidad a una distancia de 1,5 m. (b) Si la longitud de onda es de 650 nm, hallar el número de fotones por segundo que inciden sobre 1 cm<sup>2</sup> de área orientada de modo que su normal esté alineada con la lámpara.

46. ¿Cuántos procesos de dispersión de Compton frontales son necesarios para duplicar la longitud de onda de un fotón que tiene una longitud de onda inicial de 200 pm?

47. Un fotón de rayos X, cuya longitud de onda es 6 pm, tiene una colisión frontal con un electrón, de manera que sufre una dispersión con un ángulo de 180°. (a) ¿Qué cambio se produce en la longitud de onda del fotón? (b) ¿Cuál es la pérdida de energía del fotón? (c) ¿Cuál es la energía cinética del electrón dispersado?

48. Un fotón de 0,200 pm sufre dispersión desde un electrón libre que está inicialmente en reposo, ¿para qué ángulo de dispersión del fotón será la energía cinética de retroceso del electrón igual a la energía del fotón dispersado?

49. La energía de enlace de un electrón es la energía mínima que se necesita para llevar al electrón desde su estado fundamental hasta una gran distancia del núcleo. (a) ¿Cuál es la energía de enlace del átomo hidrógeno? (b) ¿Cuál es la energía de enlace del He<sup>+</sup>? (c) ¿Cuál es la energía de enlace del Li<sup>2+</sup>?

50. Un átomo de hidrógeno tiene su electrón en su estado  $n=2$ . El electrón realiza una transición al estado fundamental. (a) ¿Cuál es la energía del fotón de acuerdo con el modelo de Bohr? (b) Si se conserva el momento angular, ¿cuál es el momento angular del fotón? (c) El momento lineal o cantidad de movimiento del fotón emitido es  $E/c$ . Si admitimos la conservación de la cantidad de movimiento, ¿cuál es la velocidad de retroceso del átomo? (d) Hallar la energía cinética de retroceso del átomo en eV. ¿En qué tanto por ciento habrá de corregirse la energía del fotón calculada en la parte (a) para tener en cuenta esta energía de retroceso?

51. Una partícula de masa  $m$  se mueve dentro de una caja monodimensional de longitud  $L$ . (Considerar que la energía potencial de la partícula dentro de la caja se toma como cero, de modo que su energía total sea su energía cinética  $p^2/2m$ ). Su energía está cuantizada mediante la condición  $n(\lambda/2)=L$ , siendo  $\lambda$  la longitud de onda de De Broglie de la partícula y  $n$  es un número entero. (a) Demostrar que las energías permitidas vienen dadas por

$$E_n = n^2 E_1 \quad \text{en donde } E_1 = h^2/8mL^2$$

(b) Calcular  $E_n$  en el caso de un electrón en una caja de tamaño  $L=0,1$  nm y hacer un diagrama de niveles de energía para los estados desde  $n=1$  hasta  $n=5$ . Utilizar el segundo postulado de Bohr  $f=\Delta E/h$  para calcular la longitud de onda de la radiación electromagnética emitida cuando el electrón realiza una transición desde (c)  $n=2$  a  $n=1$ , (d)  $n=3$  a  $n=2$ , y (e)  $n=5$  a  $n=1$ .

52. (a) Utilizar los resultados del problema 51 para hallar la energía del estado fundamental ( $n=1$ ) y de los dos primeros estados excitados de un protón en una caja monodimensional de longitud  $L=10^{-15}$  m = 1 fm. (Los valores son del orden de magnitud de las energías nucleares.) Calcular la longitud de onda de la radiación electromagnética emitida cuando el protón realiza una transición desde (b)  $n=2$  a  $n=1$ , (c)  $n=3$  a  $n=2$ , y (d)  $n=3$  a  $n=1$ .

53. (a) Utilizar los resultados del problema 51 para hallar la energía del estado fundamental ( $n=1$ ) y de los dos primeros estados excitados de un protón en una caja monodimensional de longitud 0,2 nm (del orden del diámetro de la molécula de H<sub>2</sub>). Calcular la longitud de onda de la radiación electromagnética emitida cuando el protón realiza una transición desde (b)  $n=2$  a  $n=1$ , (c)  $n=3$  a  $n=2$ , y (d)  $n=3$  a  $n=1$ .

54. (a) Hallar los resultados del problema 51 para hallar la energía del estado fundamental ( $n=1$ ) y de los dos primeros estados excitados de una pequeña partícula de masa 1  $\mu$ g confinada en una caja monodimensional de longitud 1 cm. (b) Si la partícula se mueve con una velocidad de 1 mm/s, calcular su energía cinética y hallar el valor aproximado del número cuántico  $n$ .

55. En el sistema de referencia de centro de masas del electrón y el núcleo de un átomo, el electrón y el núcleo tienen cantidades de movimiento iguales y opuestas de valor  $p$ . (a) Demostrar que la energía cinética total del electrón y el núcleo puede escribirse

$$E_c = \frac{p^2}{2\mu}$$

en donde

$$\mu = \frac{m_e M}{m_e + M} = \frac{m_e}{1 + m_e/M}$$

se denomina la masa reducida,  $m_e$  es la masa del electrón y  $M$  es la masa del núcleo. Puede demostrarse que el movimiento del núcleo se puede explicar sustituyendo la masa del electrón por la masa reducida. (b) Utilizar la ecuación 35-25 sustituyendo  $m$  por  $\mu$  para calcular el Rydberg correspondiente al hidrógeno ( $M=m_p$ ) y para un núcleo de gran masa ( $M=\infty$ ). (c) Hallar la corrección en porcentaje de la energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno debida al movimiento del protón.

56. La energía cinética de rotación de una molécula diatómica puede escribirse  $E_c = L^2/2I$ , siendo  $L$  su momento angular e  $I$  su momento de inercia. (a) Suponiendo que el momento

angular está cuantizado como en el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, demostrar que la energía viene dada por  $E_{cn} = n^2 E_{c1}$ , en donde  $E_{c1} = \hbar^2/2I$ . (b) Construir un diagrama de niveles energéticos para esta molécula. (c) Estimar  $E_{c1}$  para la molécula de hidrógeno suponiendo que la separación entre los átomos es  $r = 0,1$  nm y considerando que la rotación tiene lugar alrededor de un eje que pasa por el centro de masas y es perpendicular a la línea que une los átomos. Expresar la respuesta en eV. (d) Cuando  $E_{c1}$  es mayor que  $kT$  (donde  $k$  es la constante de Boltzmann), las colisiones moleculares no producen rotación y por tanto la energía rotacional no contribuye a la energía interna del gas. Utilizar el resultado de (c) para hallar la temperatura crítica  $T_c = E_{c1}/k$ .

**Nivel III**

57. Este problema pretende estimar el retraso de tiempo del efecto fotoeléctrico (esperado clásicamente pero no observado). Sea  $0,01$  W/m<sup>2</sup> la intensidad de la radiación incidente. (a) Si el área del átomo es  $0,01$  nm<sup>2</sup>, hallar la energía por segundo que incide sobre el átomo. (b) Si la función trabajo es  $2$  eV, ¿cuánto tiempo se tardará, según la teoría clásica, en que esta energía caiga sobre un átomo?

58. Un fotón no puede transferir toda su energía a un sólo electrón libre. Demostrar este hecho considerando el problema de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento.

59. Un electrón y un positrón se están acercando mutuamente con velocidades iguales a  $3 \times 10^6$  m/s. Las dos partículas se aniquilan entre sí y producen dos fotones de la misma energía. (a) ¿Cuáles son las longitudes de onda de De Broglie del electrón y del positrón? Hallar (b) la energía, (c) la cantidad de movimiento, y (d) la longitud de onda de cada fotón.

60. (a) Despejar  $p_e^2$  en la ecuación 35-11 hasta obtener  $p_e^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2 + 2mc(p_1 - p_2)$ . (b) Eliminar  $p_e^2$  entre este resultado en la parte (a) y la ecuación 35-10 para obtener  $mc(p_1 - p_2) = p_1p_2(1 - \cos \theta)$ . (c) Multiplicar ambos miembros del resultado de la parte (b) por  $h/mcp_1p_2$  y utilizar la relación de De Broglie  $h/p = \lambda$  para obtener la fórmula de Compton (ecuación 35-12).

61. La densidad de energía total de radiación de un cuerpo negro viene dada por

$$\eta = \int f(\lambda, T) d\lambda$$

en donde  $f(\lambda, T)$  viene dada por la fórmula de Planck

$$f(\lambda, T) = \frac{8\pi hc \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

Poner como variable  $x = hc/\lambda kT$  y demostrar que la densidad de energía total puede escribirse entonces

$$\eta = \left(\frac{kT}{hc}\right)^4 8\pi hc \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \alpha T^4$$

en donde  $\alpha$  es una cierta constante independiente de  $T$ . Esto demuestra que la densidad de energía de un cuerpo negro es proporcional a  $T^4$ .

62. La frecuencia de revolución de un electrón en una órbita circular de radio  $r$  es  $f_{rev} = v/2\pi r$ , siendo  $v$  la velocidad. (a) Demostrar que en el estado estacionario  $n$ -ésimo

$$f_{rev} = \frac{k^2 Z^2 e^4 m}{2\pi h^3} \frac{1}{n^3}$$

(b) Demostrar que cuando  $n_1 = n$ ,  $n_2 = n - 1$ , y  $n$  es mucho mayor que 1,

$$\frac{1}{n_2^3} - \frac{1}{n_1^3} \approx \frac{2}{n^3}$$

(c) Utilizar el resultado de (b) en la ecuación 35-24 para demostrar que en este caso la frecuencia de radiación emitida es igual a la frecuencia del movimiento. Este resultado es un ejemplo del principio de correspondencia de Bohr: cuando  $n$  es grande, de modo que la diferencia de energías entre estados adyacentes es una pequeña fracción de la energía total, la física clásica y cuántica deben dar los mismos resultados.